Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)

Rodolfo Vergel Causado

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Mayo de 2014

Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)

Rodolfo Vergel Causado

Director de tesis: Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Mayo de 2014

Dedicatoria

A mi madre, quien siempre ha estado presente aun cuando no esté

A Myriam, por su tolerancia, comprensión, su amor y permanente apoyo

A mis hijos, Paula Alejandra, Santiago y Juan Sebastián, pues son el norte de mi existencia

Agradecimientos

A Bruno, amigo sincero, incondicional y crítico permanente

Al profesor Luis Radford, por sus enseñanzas, por haber permitido trabajar a su lado durante el tiempo de elaboración de la tesis y especialmente por haber compartido conmigo sus saberes en la pasantía doctoral en la Universidad de Laurentian, Sudbury, Canadá

Al profesor Carlos Eduardo Vasco, por su sabiduría, su orientación y crítica permanente que posibilitó cualificar mi formación

Al profesor Isaías Miranda Viramontes, por siempre estar dispuesto a escucharme y brindarme el espacio para discutir elementos claves de esta investigación doctoral

A los niños y niñas de la Institución Educativa Distrital Eduardo Umaña Mendoza

A la profesora Johanna Alexandra Villanueva, por su ímpetu en el trabajo con los niños y las niñas participantes de esta investigación

Contenido

Índice de figuras, diagramas y tablas

Introducción

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo esto demanda necesariamente desarrollar una perspectiva ampliada sobre la naturaleza del álgebra escolar, que considere una relación dialéctica entre las formas de pensamiento algebraico y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones, lo cual introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes.

En este proceso de generalización de patrones debemos considerar que los actos de conocimiento por parte de los estudiantes incluyen diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., que llegan a ser partes integrales de los procesos cognitivos. Esto es lo que se ha llamado en el contexto internacional (Arzarello, 2006) la naturaleza multimodal de la cognición humana.

Estamos, pues, frente a la necesidad de reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas. En términos epistemológicos, estamos sugiriendo que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Estos recursos o modalidades incluyen comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards & Arzarello, 2009).

Asumimos como un problema didáctico la emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones. Estas generalizaciones que producen los estudiantes podrían no ser tan sofisticadas (entendiendo lo sofisticado como expresiones en términos de signos alfanuméricos). Debemos reconocer que las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos pueden componerse de acciones, tales como gestos, ritmos, miradas, palabras, esto es, de formulaciones que se expresan y se despliegan en el espacio y el tiempo. Éstas han pasado desapercibidas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que son elementos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático, por lo que se hace necesario detectarlas y analizar cómo emergen y evolucionan dentro de una serie de actividades de enseñanza y aprendizaje en el contexto de tareas sobre generalización de patrones.

De esta manera, el propósito de esta investigación es identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.

Este trabajo lo hemos divididos en cinco capítulos. En el primero de ellos presentamos el planteamiento de nuestro problema de investigación. En concordancia con nuestro objetivo, exponemos la pregunta de investigación asociada con el desarrollo conceptual. En este sentido, la pregunta es posible de ser explorada en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. La pregunta que orienta el estudio es: *¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?* A continuación abordamos los antecedentes de nuestro estudio. Por una parte presentamos el estado de conocimiento sobre el pensamiento algebraico y de otro lado describimos el estado de conocimiento sobre el proceso de generalización en la didáctica de las matemáticas.

El segundo capítulo lo dedicamos a desarrollar los elementos que conforman la fundamentación teórica del estudio. En esta dirección planteamos una idea de cultura y su importancia en los procesos de aprendizaje. La mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotski y su influencia teórica sobre la interpretación acerca de cómo se desarrolla el pensamiento se constituyen en ideas claves dentro del cuadro teórico. Estas ideas nutren la teoría de la objetivación como una aproximación histórico-cultural, la cual asumimos como referente principal en nuestra investigación. En este sentido, hacemos una breve presentación de los inicios de esta teoría y planteamos algunas consideraciones filosóficas desarrolladas recientemente en el marco de esta perspectiva teórica. El gesto como medio semiótico de objetivación y las ideas de nodo semiótico y contracción semiótica son elementos teóricos que nos permite analizar la actividad matemática desarrollada por nuestros estudiantes. En este cuadro teórico finalizamos con los desarrollos sobre el pensamiento algebraico y la generalización algebraica de patrones. En particular, el pensamiento algebraico lo caracterizamos de acuerdo con Radford (2010b) a partir de tres elementos o vectores: el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica.

En el Capítulo 3 proponemos nuestro diseño de la investigación, en el cual presentamos la fase de pilotaje, el diseño y la justificación de las tareas propuestas, así como la caracterización de la población. Describimos también la naturaleza de las sesiones de trabajo y los procesos de recolección de la información. En la parte final de este capítulo exponemos los elementos relacionados con la constitución de los datos y la descripción de cómo se hizo el análisis de los mismos.

El desarrollo de la investigación y el análisis multimodal de las producciones de nuestros estudiantes conforman el Capítulo 4. Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos los resultados de nuestra investigación obtenidos del análisis multimodal de los datos, así como algunas observaciones finales que se derivan de este trabajo de tesis.

Capítulo 1
La Investigación

1.1 Planteamiento del problema de investigación

Resultados de investigación enmarcados en la perspectiva semiótica-cultural de la educación matemática sugieren revisar los estudios sobre el desarrollo del pensamiento matemático en general y en particular las formas de pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Dichos trabajos (Arzarello & Edwards, 2005; Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Arzarello, 2006; Radford & Demers, 2004; Radford, Bardini & Sabena, 2007; Radford, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c; Radford & Roth, 2010; Roth & Radford, 2011; Santi, 2010, 2011; D´Amore, Radford & Bagni, 2007) ponen en evidencia la necesidad de reconocer que, por ejemplo, las formas de pensamiento algebraico pueden ser exploradas en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones.

Los resultados de estas investigaciones indican que, en particular, las formas de pensamiento algebraico emergen en el aula de clase como consecuencia no sólo de las tareas propuestas, sino también de la naturaleza de la actividad.[1] Estos resultados sugieren que dentro de esta actividad se manifiesta la toma de conciencia (objetivación) de las formas históricas de pensamiento algebraico que objetivan los alumnos. La idea de

[1] La idea de actividad, en el sentido de Leontiev, según Radford (2004b), es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales; este objeto de la actividad se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva inscrita en estos últimos por generaciones pasadas. Esta idea será tematizada en el cuadro teórico de este proyecto, en el cual haremos la distinción, desde la epistemología hegeliana, entre tarea y actividad.

actividad nos obliga a considerar una concepción de semiótica,[2] en donde el pensamiento aparece de manera contextualizada.

Uno de los intereses actuales, según Radford, es la creación de actividades de clase que tengan una densidad epistemológica y propicien la interacción entre los estudiantes y entre estudiantes y profesor, en torno a tareas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de *reflejar su pensamiento algebraic*o (ver, por ejemplo, Radford, 2000, 2002, 2003, 2009; Radford & Demers, 2004; Radford, Bardini & Sabena, 2007). Se reconoce que en este proceso de manifestar su pensamiento algebraico, en general los estudiantes acuden necesariamente a maneras de referir lo indeterminado.

Vasco (2007) y Radford (2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) ponen de manifiesto el interés de investigar sobre las formas como niños y niñas *refieren a lo indeterminado*, las formas de referir a la incógnita o variable, las cuales pueden ser lingüísticas y también corporales. Vasco (2007), apoyado en planteamientos de Austin (1962, 1975) y Searle (1969, 1979), sostiene que además de la sintaxis, en un enunciado (por ejemplo, de tipo algebraico como puede ser una fórmula algebraica) es necesario considerar su significado inmediato por la semántica y la intención ilocutiva del enunciador por la pragmática. Este autor llama la atención sobre la necesidad de analizar las dificultades de los estudiantes que aparecen por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje, no sólo en los grados de secundaria (por ejemplo en 8° y 9°) sino desde los inicios de la escolaridad. En esta dirección Vasco (2007, p. 123) plantea que:

> Las dificultades introducidas por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje aritmético-algebraico no aparecen sólo con la introducción del álgebra elemental en los grados octavo y noveno, pues están presentes desde el inicio

[2] La idea de signo en la psicología vygotskiana incluye: gestos, movimiento, algo escrito, lo oral, etc., lo cual sugiere nuestro posicionamiento en una perspectiva pragmática del significado, en tanto la mediación semiótica va más allá de adjudicarle a los signos el simple rol de representación del conocimiento. Los signos se convierten en los mediadores que permiten realizar la actividad reflexiva. El papel de representar, por lo general atribuido a los signos, es sustituido por un proceso más integral que Radford (2004, 2006b) llama *objetivación*.

de la aritmética escolar en los primeros grados de primaria, y hoy día, aun en los últimos de preescolar.

Es necesario subrayar que estas dificultades parecen estar inscritas en las interacciones que se dan entre los tres aspectos del lenguaje (sintaxis, semántica y pragmática), más que en cada uno de ellos separadamente.

Socas (2011) informa que las orientaciones curriculares de Pre-Álgebra y de "Early-Algebra" se encuentran en una fase de desarrollo inicial en los tres ámbitos que caracterizan la Educación Matemática: epistemológico, cognitivo y didáctico. Sostiene, apoyado en los estudios de Mason (1996), Mason, Graham, Pimm & Gowar (1999), Mason, Burton & Stacey (1982), Carraher & Schliemann (2007), Kieran (2007) y Radford (1996), entre otros, que no hay todavía respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, y qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico.

Un componente necesario de la generalización algebraica según Kieran (1989, 2006, 2007) es el uso del simbolismo algebraico para razonar sobre la generalización y expresarla. Según Kieran (1989, p, 165), "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente". El simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, "el lenguaje que expresa la generalidad" (Mason, 1996). No obstante, la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad. English & Warren (1998) sostienen que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

En relación con la naturaleza diversa del lenguaje aludida en el párrafo anterior y a partir de las sugerencias investigativas de Vasco (2007) y Radford (2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) en relación con las formas como niños y niñas refieren a lo indeterminado y expresan la generalidad, estudios llevados a cabo por Radford (2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c) han identificado una tipología de generalizaciones algebraicas. Dicha tipología (Factual, Contextual y Simbólica), "puede considerarse como ejemplos de formas de pensamiento algebraico" (comunicación personal, septiembre 15 de 2011). En este sentido, los medios semióticos de objetivación (gestos, movimiento, ritmicidad, artefactos, actividad perceptual, formas lingüísticas, etc.)[3] estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad. Según este investigador, las formas de pensamiento algebraico (*Factual, Contextual y Simbólica*) constituyen un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes a través de los medios semióticos de objetivación que movilizan, cuando se enfrentan a tareas en el contexto de la generalización de patrones. Los procesos de objetivación (Radford, 2009), en principio, son asumidos como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes capturan la lógica cultural con la que los objetos de saber han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas.

En la secuencia figural[4] presentada a continuación (Radford, 2010a), junto con los segmentos de entrevista y la secuencia de señalamientos realizados por Dan mostrada en la Figura 2, podemos apreciar producciones de este estudiante cuando aborda una tarea sobre secuencia figural (con apoyo tabular). Estas producciones ponen en evidencia cierta familiaridad con una forma de pensamiento algebraico; en este caso, la que llama este autor, Factual.

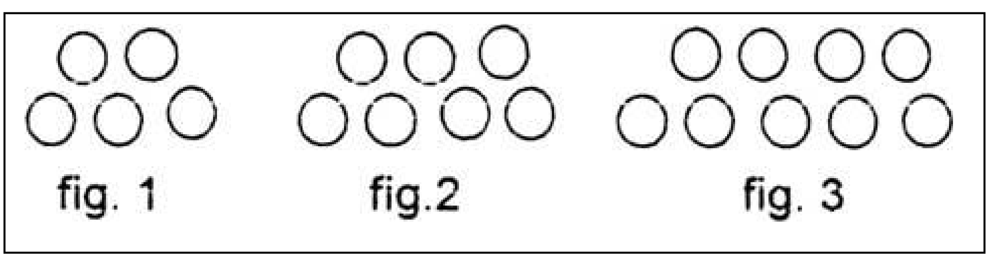


Figura 1. Secuencia figural con apoyo tabular presentada en Radford (2010a)

[3] La idea de medio semiótico de objetivación será desarrollada en el marco teórico de esta investigación. En particular, hacemos una caracterización teórica de la idea de gesto como medio semiótico de objetivación.
[4] Radford, en sus distintos trabajos de investigación, llama figurales a este tipo de secuencias. En esta investigación las llamaremos secuencias figurales con apoyo tabular, las cuales junto con las secuencias numéricas con apoyo tabular y secuencias puramente figurales y puramente numéricas serán abordadas en el Capítulo 3, Diseño de la investigación.

1. Dan: (*refiriéndose a la Figura 1*) Bien (…) [*señalando a la fila superior*] 2 en la parte superior; hay, hay 3 en la parte inferior (…).
2. Jimmy: [Figura] 2, hay 3; [Figura] 3, hay 4.
3. Dan: Espera un minuto. OK [*él hace una serie de gestos mientras habla; ver 4 de los 6 gestos en la Figura 2*], Figura 1, 2 en la parte de arriba. Figura 2, 3 en la parte de arriba. Figura 3, 4. Figura 4, 5.
4. Jimmy: Figura 10, será 11(…).
5. Dan: (…) 11 en la parte de arriba, y 12 en la parte de abajo.
6. Jimmy: Cada vez va a ser uno más en el aire.
7. Frank: [Figura] 100? 101, 102 (…).
8. Dan: 203.

Puede observarse cómo Dan hace una secuencia de señalamientos de gestos coordinados con palabras, en un primer proceso de objetivación.

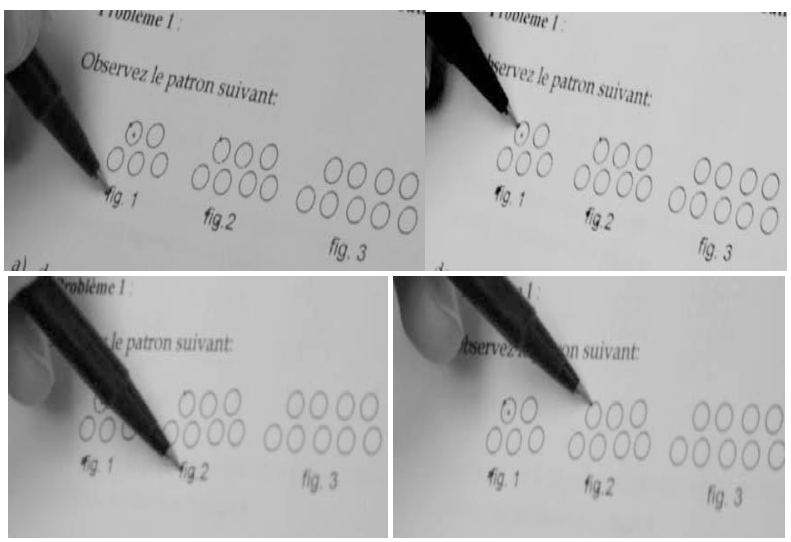


Figura 2. Secuencia de señalamientos realizados por Dan al abordar una tarea sobre secuencia figural con apoyo tabular

De manera preliminar consideramos tanto el pensamiento algebraico Factual como el pensamiento algebraico Contextual formas de acción y reflexión codificadas histórica y culturalmente (Radford, 2013a). Éstas se presentan como mera potencialidad. En el pensamiento algebraico Factual la generalidad se basa en acciones realizadas sobre números; las actuaciones constan aquí de palabras, gestos y de actividad perceptual. Por su parte, en el pensamiento algebraico Contextual la formulación algebraica es una descripción del término general (Radford, 2010a). El ritmo y los gestos se sustituyen por términos descriptivos claves, como por ejemplo, la respuesta de un estudiante de grado 9: *"# de la figura + 1 para la fila superior y el # de la figura + 2 para la parte inferior. Agregar los dos para el total"*.

Una situación similar como la anteriormente descrita ha sido evidenciada en el contexto colombiano por el autor del presente trabajo de investigación. En el episodio presentado a continuación se muestran algunas acciones que evidencian la "actividad matemática" realizada por Paulita al interactuar tanto con Rodolfo como con la siguiente tarea sobre generalización de patrones (secuencia figural apoyada por representación tabular), en la que se requiere, inicialmente, calcular el número de bolitas en las posiciones 5 y 10.[5]

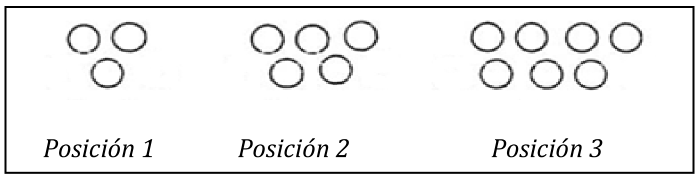


Figura 3. Secuencia figural con apoyo tabular presentada a Paulita

1. Rodolfo: ¿Cómo haces entonces para resolverlo?

2. Paulita: Entonces en la parte de arriba le sumo 1 (…) Si en la posición 1 hay 2 entonces en la posición 5 se le suma 1 o sea 6 y debajo le resto 1, que serían 5 bolitas, 5 bolitas [señala]. En la posición 10 al 10 le sumo 1 que serían 11 bolitas y abajo le resto 1 que serían 10 bolitas y ya.

3. Rodolfo: Mmmm ya, o sea ¿cómo haces para hacer la posición 7?, por ejemplo.

4. Paulita: Entonces serían 8 bolitas y 7 abajo [señala con el esfero].

5. Rodolfo: O sea ¿cómo es la relación?

6. Paulita: [Interrumpiendo] Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1.

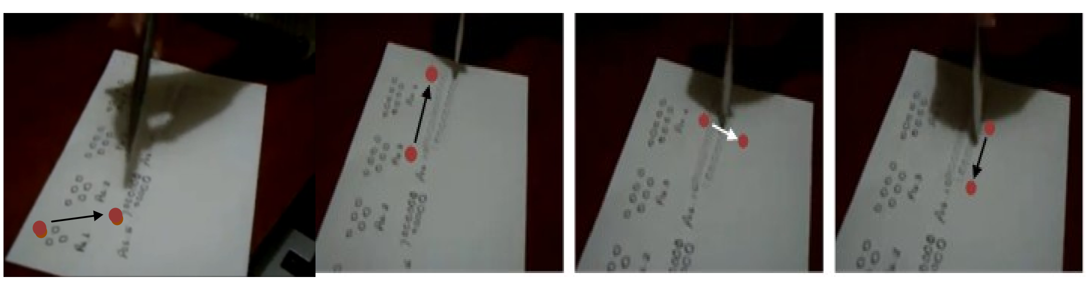


Figura 4. Paulita explica la regularidad percibida como sumar 1 arriba y restar 1 abajo, acompañando dicha explicación con movimientos del esfero

[5] El video se elaboró con el objetivo de corroborar algunas hipótesis que se tenían en este estudio. Se puede ubicar en el link http://www.youtube.com/watch?v=AQkeU5UYAv0

Las situaciones relacionadas con las inscripciones, el movimiento del esfero, la actividad perceptual, el ritmo, son elementos que nos están indicando que Paulita puede haber identificado el patrón, sin embargo aún no lo puede expresar algebraicamente; sólo puede enunciar la generalidad a través de una frase como se muestra en la línea 6 ("*Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1").*[6] No obstante, es necesario considerar estas manifestaciones, pues desestimarlas es no reconocer prácticas semiótico-culturales presentes en la actividad matemática de Paulita. Ello implicaría desaprovechar todo un arsenal de *"aspectos matemáticos corpóreos"* que nos pueden estar brindando información importante sobre la emergencia de su pensamiento algebraico.

Los procedimientos y acciones que subyacen al significado que los estudiantes van elaborando en el proceso de identificar el patrón y expresarlo de alguna manera, como en los casos de Dan y de Paulita, sugieren, según Radford, que "lo matemático puede estar emergiendo a través del trasfondo histórico cultural de la interacción social" (comunicación personal, 22 de octubre de 2010). Esto es, en un contexto de enseñanza-aprendizaje las formas de interacción social ponen en funcionamiento elementos culturales que son constitutivos de la emergencia de ideas matemáticas.

Parece claro, entonces, que las "formulaciones" que expresan las generalizaciones de los alumnos, como en el caso de Paulita y de Dan, se componen de acciones, tales como gestos, ritmos, miradas, palabras (por ejemplo, líneas 1, 3 y 5 en la primera situación y líneas 2 y 4 en la segunda situación) por lo que sería más conveniente hablar de *fórmulas corporeizadas* (Radford, 2003, 2010a)*,* esto es, fórmulas expresadas a través de acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo.[7] De esta manera, recursos semióticos como hacer, tocar, mover, mirar (Arzarello, 2006) emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático, por lo que se hace necesario, en términos de

[6]El doctor Bruno D´Amore informa el caso de niños que aportan evidencias, de un aula de clase de matemáticas, sobre la comprensión de la propiedad conmutativa de la adición en contextos que no incluyen letras. El carácter algebraico de tal situación no fue reconocido por el maestro que dirigía la clase (comunicación personal, abril 6 de 2011).

[7] En el marco de la presente investigación entendemos el término *corporeizadas* como sinónimo del término *corpóreas.*

investigación, detectarlos y analizar cómo emergen y evolucionan dentro de una actividad de enseñanza y aprendizaje en el contexto de tareas sobre generalización de patrones.

Las investigaciones de Radford sugieren continuar indagando otras formas de pensamiento algebraico provocadas por las situaciones matemáticas planteadas a los estudiantes. Si bien se dispone de ciertos resultados acerca de la emergencia del pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes frente a tareas basadas en patrones figurales, se conoce muy poco o casi nada acerca de la emergencia del pensamiento algebraico y las dificultades de los estudiantes jóvenes ante tareas como las secuencias puramente numéricas o puramente figurales. La idea de explorar sistemáticamente y comparativamente el pensamiento algebraico en estos contextos, según Radford, parece muy importante para hacer avanzar la investigación en la educación matemática. Según este investigador,

> Conocemos muy poco sobre el pensamiento algebraico y, en particular, sabemos menos sobre el pensamiento algebraico en niños y jóvenes. La investigación en álgebra temprana comenzó hace apenas algunos años. El pensamiento algebraico es todavía muy general en su caracterización y requiere mucha más investigación. (Comunicación personal, 25 de marzo de 2011)

De esta manera, reconocemos un espacio para una zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo (o al menos no en gran medida) a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta zona, que se ha denominado *zona de emergencia del pensamiento algebraico* (Radford, 2010b), se ha mantenido en gran medida ignorada como resultado de nuestra obsesión por el solo reconocimiento de los símbolos algebraicos.

La aparición de formas de pensamiento algebraico podemos considerarla, entonces, como un problema didáctico:

> Es todo ese fenómeno de aparición de formas de pensamiento el que tenemos que entender mejor. Y esto depende de la estructura de la clase en particular, de

la actuación del profesor, de la actividad de los alumnos, de los problemas que proponemos y el tipo de preguntas que planteamos, etc." (Comunicación personal, 3 de Octubre de 2011)

En particular, es materia de mayor investigación la evolución de las fórmulas corpóreas de los estudiantes hacia formas más sofisticadas, lo cual requiere, según Radford (2010c), un refinamiento de la actividad perceptual.

De situaciones como las referenciadas anteriormente, surgen interrogantes como:

- ¿Qué procesos de objetivación emergen en estudiantes de 9 y 10 años cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones?, ¿cómo poder identificarlos?
- ¿Cómo dichos procesos cambian según que la generalización se haga sobre secuencias puramente numéricas o secuencias numéricas apoyadas por representaciones tabulares o secuencias figurales con apoyo tabular o secuencias puramente figurales?[8]
- ¿Cuáles recursos semióticos (corporales, lingüísticos, simbólicos) resultan ser movilizados en los procesos de generalización de secuencias puramente numéricas en alumnos jóvenes (9-10 años)?[9]
- ¿Qué tipo de relaciones emerge dentro y entre los sistemas semióticos que están activos en el mismo momento y su dinámica de desarrollo en el tiempo?
- ¿Acaso muchos de los procedimientos que hacen nuestros niños y niñas y estudiantes jóvenes, sin usar letras, no podrían tipificarse como algebraicos?, ¿Por qué hemos desestimado este tipo de procedimientos?
- ¿Cómo vincular teóricamente el hecho de que los gestos, el movimiento, la actividad perceptual, la ritmicidad, son elementos consustanciales del pensamiento algebraico?

[8] Los términos secuencias puramente numéricas y secuencias numéricas apoyadas por representaciones tabulares se precisarán en el apartado de la metodología de este proyecto de investigación.

[9] A manera de conjetura, al parecer las secuencias figurales y las figurales con apoyo tabular ofrecen índices geométrico-espaciales que hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales, formas que parecen no ser movilizadas, o por lo menos no con la misma intensidad, en el caso de las secuencias puramente numéricas.

Los interrogantes planteados, los cuales fueron surgiendo durante el proceso de construcción del problema de investigación así como en el proceso de comprensión de los constructos analíticos de la teoría cultural de la objetivación, comprometen necesariamente el desarrollo conceptual. Nuestra pregunta de investigación, que por supuesto también refiere al desarrollo conceptual, es posible de ser explorada en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. De esta manera nuestro estudio está orientado por la siguiente pregunta:

> *¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?*

1.2 Antecedentes

1.2.1 Estado de conocimiento sobre el pensamiento algebraico. En esta dirección, los estudios e investigaciones han abordado el problema de la incorporación del Álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas, lo que se ha denominado la propuesta de cambio curricular Early-Algebra. En términos generales esta expresión (que hemos traducido como "Álgebra Temprana"), considera el Álgebra en una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; citados en Socas (2011).

Esta perspectiva convoca a los docentes de todos los niveles a posibilitar en el trabajo de aula de matemáticas (Blanton & Kaput, 2005) la observación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo. En palabras de Kaput (2000) se trata de una "algebrización del currículo", esto es, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Comprende en definitiva la instrucción a alumnos de 6 a 12 años tanto del razonamiento algebraico como de las relaciones algebraicas.

La perspectiva "Álgebra Temprana" se diferencia de la de Pre-Álgebra, pues esta última prepara para el estudio del álgebra formal. La finalidad de Pre-Álgebra es facilitar la transición de la Aritmética al Álgebra, dadas las dificultades y los errores que tienen los alumnos en Álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la Educación Primaria.

La ausencia de significado en el aprendizaje algebraico por parte de los estudiantes ya había sido advertido por Martin Kindt (1980, citado por Molina, 2006), quien frente a esta situación destaca tres grandes problemas de la enseñanza del álgebra, a saber:
- falta de atención a la generalización y al razonamiento
- un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y
- la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra.

Kieran (1989) sugiere profundizar urgentemente en la investigación sobre la *naturaleza del pensamiento algebraico.* A partir de este llamado, surge una doble preocupación en la comunidad nacional e internacional. Por un lado, la preocupación se manifiesta en términos de la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los alumnos de primaria elaboran generalizaciones, y por otro, el llamado a promover desde los primeros grados de la educación primaria el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por su parte, los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) comparten esta visión multidimensional al distinguir como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Algunos estudios en el contexto colombiano en relación con dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado que alumnos de grado 8 y 11 asignan al uso de las letras en álgebra (Pretexto, 1999; Agudelo-Valderrama, 2000; Agudelo-Valderrama & Vergel, 2009; Perry, Gómez, Castro, Valero & Agudelo, 1998; Bonilla, 1994) sugieren una necesidad imperiosa de profundizar en el estudio del currículo de esta área de las matemáticas. Además, los resultados de estudios internacionales como el TIMMS[10] muestran que los estudiantes colombianos no están desarrollando el pensamiento matemático que se construye a través del aprendizaje del álgebra.

Godino & Font (2000) prefieren hablar en términos del razonamiento algebraico. Señalan que este tipo de razonamiento implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas.

Kaput & Blanton (2001) proponen algebrizar las situaciones diseñadas para la enseñanza, lo cual abre la posibilidad de generar actividades que promuevan oportunidades para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones. Por otro lado, sugieren identificar y apoyar los actos y contextos que promueven el razonamiento algebraico de los estudiantes, lo cual implica reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir argumentos sobre estructuras generales, así sus argumentaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas.

En el contexto nacional, Vasco (2002) y MEN (1998, 2003) plantean el desarrollo del pensamiento variacional como construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio, y por lo tanto es un pensamiento dinámico. Vasco y el MEN proponen que este tipo de pensamiento debe tener sus inicios en los primeros años

[10] El estudio TIMSS '*Third International Study in Mathematics and Science*' se llevó a cabo durante el período de 1991-1995, con la participación de 41 países. En este estudio participaron estudiantes colombianos de los Grados 7 y 8 y 11.

de la educación básica, fundamentalmente centrando la mirada en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones.

Carpenter y sus colegas (2003) han venido trabajando con un grupo de profesores para estudiar el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes en los grados primarios y la construcción de los enfoques de instrucción de apoyo en el desarrollo. Su trabajo con 100 maestros de escuelas primarias y de sus estudiantes en los grados 1º a 6º ha proporcionado las siguientes ideas: cuando los estudiantes hacen generalizaciones acerca de las propiedades de los números o las operaciones, hacen explícito su pensamiento matemático.

Carpenter señala que aunque los estudiantes tienen a menudo una gran cantidad de conocimiento implícito de las propiedades de las operaciones aritméticas, se reconoce que no se han examinado las generalizaciones acerca de las propiedades de los números y las operaciones o realizado un análisis sistemático sobre ellas. La clave para los educadores, señala el autor, es encontrar un contexto de instrucción en el que el conocimiento implícito de los estudiantes pueda explicitarse. En otro estudio, (Carpenter & Franke, 2001), se pone el interés en indagar por el proceso de generalización y de prueba y por la justificación de conjeturas.

Afirma Kieran (2004, p. 49) que el pensamiento algebraico en las primeras etapas del álgebra escolar "debe incluir el desarrollo de formas de pensar como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción".

Como lo señalan Lins & Kaput (2004), la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, durante las décadas de los 80 y 90, ponía el acento en estudiar los errores y dificultades que presentan los estudiantes (lo que los estudiantes no pueden hacer) cuando aprenden álgebra, debidos posiblemente al tipo de enseñanza recibida, razón que justificó posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares. Con la perspectiva de cambio curricular Álgebra Temprana, el énfasis recae en las posibilidades de hacer de los estudiantes y consecuentemente en las maneras de explotar su potencial de desarrollo matemático.

Blanton & Kaput (2005) analizan un estudio de caso de una maestra de tercer grado de primaria cuando intenta integrar el pensamiento algebraico en la práctica de aula. Los resultados sugieren que la maestra logró cierto éxito en integrar el razonamiento algebraico en la enseñanza de manera planificada y espontánea y ello condujo a cambios positivos en las destrezas y en el razonamiento algebraico de los estudiantes.

Kieran (2006) presenta una síntesis en la cual reporta cómo los temas en relación con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se han movido desde la transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones, solución de ecuaciones y problemas algebraicos de palabras (1977 al 2006), hasta los relacionados con el pensamiento algebraico en estudiantes de escuela primaria (mitad de 1990 al 2006), pasando por los temas relativos al uso de herramientas tecnológicas y un enfoque en múltiples representaciones y la generalización (mitad de 1980 al 2006).

Durante la última década la evidencia de la investigación se ha ido acumulando para indicar que muchos de los estudiantes tienen una comprensión muy pobre de las relaciones y las estructuras matemáticas que son la base de la representación algebraica. Dicha falta de comprensión no es un nuevo fenómeno algebraico: los estudios resumidos por Kieran, demuestran que el problema tiene su origen en la aritmética. De hecho, una parte importante de las dificultades de los estudiantes en álgebra se deriva precisamente de su falta de comprensión de las relaciones aritméticas.

Por tanto, la capacidad para trabajar de manera significativa en el álgebra, y así manejar las convenciones de notación con facilidad, requiere primero que los estudiantes desarrollen una comprensión semántica y pragmática de la aritmética. Una de las tareas de investigación es examinar cuestiones del reconocimiento de los estudiantes y el uso de la estructura y cómo este reconocimiento puede desarrollarse. Consecuentemente, una segunda tarea es utilizar esta información para idear nuevas actividades y entornos de aprendizaje para ayudar a los estudiantes en este desarrollo.

Molina (2006) estudia el uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que estudiantes de tercero de primaria ponen de manifiesto en el contexto del trabajo con igualdades y sentencias numéricas. La investigación ilustra parte del potencial de la propuesta Álgebra Temprana, al llevarse a cabo una intervención de enseñanza que promueve la algebrización de la aritmética.

En Molina (2009), partiendo del constructo pensamiento relacional, la autora presenta resultados de un experimento de enseñanza, basado en el trabajo con sentencias numéricas, que ejemplifica el potencial de la propuesta de cambio curricular Álgebra Temprana. Estos resultados permiten evidenciar la capacidad de alumnos de tercer curso de educación primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

1.2.2 Estado de conocimiento sobre el proceso de generalización en la didáctica de las matemáticas. En el campo de la didáctica de las matemáticas se reconoce un interés por el estudio de los procesos de generalización. No puede desestimarse que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas, el proceso de definir en matemáticas, la abstracción, entre otros procesos, requieren con mucha frecuencia de procesos de generalización. Como lo señalan Mason, Burton & Stacey (1982, p. 21), "la generalización es el verdadero nervio de la matemática". A continuación hacemos un breve recorrido, intentando mostrar el estado del arte de la cuestión.

Rubinstein (1966) sostiene que la generalización -relacionada con el pensamiento teórico- descubre las conexiones necesarias sujetas a la ley de los fenómenos y faculta para explicar las diversas manifestaciones de sus relaciones internas. Esto sería el material de base para afirmar que los distintos niveles del pensamiento se determinan por los tipos de generalización del material cognoscitivo. En otras palabras, señala Rubinstein, es necesario diferenciar distintos niveles del pensamiento en dependencia de lo alto que sea el nivel de sus generalizaciones y de la hondura con que a su vez del fenómeno a la esencia. En este trabajo establece cinco niveles de generalización, a saber:

Primer nivel: la representación singular de lo general, esto se refiere a cuando representamos los componentes de un conjunto de muchos o infinitos elementos mediante una determinada semiótica.

Segundo nivel: la generalización producto de una deducción.

Tercer nivel: la generalización por extensión de un concepto, esto es cuando se pasa de un concepto a otro más general, pero que mantiene los rasgos esenciales del primero.

Cuarto nivel: la generalización se logra mediante un cambio del problema con el que se trabaja, aunque manteniéndose en el mismo modelo.

Quinto nivel: la generalización con desarrollo de un nuevo modelo.

Krutetzki (1976, citado por García, 1998) señala la habilidad para generalizar algún contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto).

Para un alumno, sostiene Krutetzki, una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares. En su investigación Krutetzki diseñó materiales para estudiar la habilidad mostrada por los alumnos en el segundo de los niveles de generalización del contenido matemático a partir del proceso de inducción finita. Como resultados se distinguieron cuatro niveles de habilidad para generalizar entre alumnos que poseen diferentes capacidades para las matemáticas.

Nivel 1. No generaliza material respecto de atributos esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos intermedios del mismo tipo.

Nivel 2. Generaliza material respecto de atributos esenciales con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos del mismo tipo, mostrando errores e imprecisiones.
Nivel 3. Generaliza material respecto de atributos esenciales por sí mismo, pero después de varios ejercicios del mismo tipo con errores insignificantes. Es capaz de realizar generalizaciones libres de error por medio de indicaciones y preguntas insignificantes hechas por el investigador.
Nivel 4. Generaliza material correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin ayuda por parte del experimentador y sin una práctica especial en resolver problemas del mismo tipo.

En el campo de la resolución de problemas, atendiendo a las características de sus resoluciones, Krutetzki (1976, citado por García, 1998) estableció que los estudiantes se podían clasificar en tres grandes grupos:
- *El visual o geométrico,* compuesto por aquellos individuos dotados de una habilidad especial para interpretar visualmente relaciones matemáticas abstractas y caracterizados por su persistencia en el uso de esquemas visuales incluso cuando los problemas se pueden resolver fácilmente desde otros enfoques.
- *El no visual o analítico,* formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.
- *El intermedio o armónico,* integrado por aquellos alumnos en los que se da un equilibrio entre las aproximaciones visuales y analíticas en la resolución de problemas.

Davydov (1981), en su obra "Tipos de generalización en la enseñanza", aborda algunos problemas fundamentales de la pedagogía partiendo de posiciones filosóficas marxista-leninistas tales como los problemas de la generalización en la psicología y en la didáctica tradicionales, la esencia gnoseológica de la teoría de la generalización y la formación de los conceptos aceptados en las ciencias antes mencionadas. En particular cabe destacar dos grupos esenciales de fenómenos con los que comúnmente se halla relacionado el término generalización. En primer lugar, se tiene el *proceso*[11] de generalización, esto es, el tránsito

[11] Énfasis en el original.

del niño de la descripción de propiedades de un objeto individualizado a su hallazgo y separación en toda una clase de objetos similares (Davydov, 1981, p. 13). Por otro lado, señala Davydov (1981. P.13) “al caracterizar el *resultado*[12] de este proceso se advierte la facultad que tiene el niño de abstraerse de ciertos rasgos particulares y variables del objeto”.

Dorfler (1991) sostiene que una acción se debe entender en sentido tan amplio como sea necesario. Incluso las más puras operaciones matemáticas deben considerarse como acciones, debido al carácter cíclico del proceso de generalización. En la formación de un concepto matemático, en un nivel elemental, una acción puede consistir en agrupar objetos materiales determinados y en otro nivel superior dentro del mismo concepto, la acción puede tomar el sentido de operación matemática de ordenar o sumar, actuando sobre elementos abstractos. Dorfler contempla tres procesos generales dependiendo cada uno del centro de interés:
(i) El centro de interés es el esquema de la acción, forma general del proceso.
(ii) Las condiciones para la plausibilidad de las acciones, formuladas como relaciones entre objetos o como propiedades de los objetos.
(iii) El producto o resultado de las acciones.

Azarquiel (1993, p. 27) señala que “la generalización en muchas ocasiones lleva consigo un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad”. Ver y expresar los aspectos generales tiene interés en sí mismo, como una potente actividad intelectual que se pone en juego en muchas ocasiones, pero es además una capacidad que puede desarrollarse (Azarquiel, 1993, p. 27).

Sin embargo, generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto. Azarquiel sostiene que también se generaliza cuando se transfieren a una situación propiedades que se cumplen en otra, y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley. El proceso de generalización se constituye en un

[12] Énfasis en el original.

proceso matemático complejo. Ahora bien, los procesos de generalización relacionados con el álgebra permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico. Azarquiel considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados, a saber: la visión de la regularidad, la diferencia, la relación; su exposición verbal; y su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

Para Mason (1996) la generalización es el corazón de las matemáticas y consiste tanto en ver los casos particulares en la generalidad como en ver la generalidad a través de los casos particulares. Mason sostiene que la generalización es un proceso complejo. En su trabajo es central la preocupación por sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y plantearles un juego permanente y dual, entre generalización -y especialización (particularización), como aspectos que constituyen el objetivo central de la enseñanza de la matemática. El autor reconoce que hay algo específico de esta disciplina dado por la naturaleza de los objetos sobre los que se generaliza y por la manera en que se justifica la generalización.

En el trabajo doctoral de García (1998) es fundamental el concepto piagetiano de *abstracción reflexiva* o reflectora, esto es, la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos. La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisolubles: un *proceso de reflexión*, 'reflejamiento' o proyección que hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a otro superior (por ejemplo de la acción física a la representación mental) y un *producto de la reflexión*, una 'reflexión' en el sentido mental, que permite una reorganización o reconstrucción cognitiva, sobre el nuevo plano de la que ha sido extraído del plano precedente.

En el plano inferior las acciones y operaciones se realizan sobre objetos concretos, físicos o imaginados, mientras que en el plano superior las acciones y operaciones interiorizadas actúan sobre objetos abstractos y las coordina para formar nuevas acciones que dan lugar a nuevos objetos. Siendo así, el sujeto reconstruye lo así abstraído en un plano superior nuevo, cuyo funcionamiento es distinto y tal reconstrucción conduce a un esquema cognitivo más general. García, apoyado en los elementos teóricos de Piaget, señala que la abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de actos materiales en un sistema de operaciones interiorizadas cuyas leyes o estructura se comprenden en un *acto simultáneo*.

García (1998) aporta evidencias del desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de secundaria cuando se enfrentan a problemas de generalización lineal. El autor persigue en su tesis, por un lado, estudiar el proceso de generalización, más específicamente, determinar las acciones que los alumnos realizan y los invariantes que establecen al abordar las tareas denominadas problemas de generalización lineal. Por otro lado, se interesa en derivar orientaciones para la práctica educativa en el nivel de enseñanza secundaria.

Según García, el término problemas de generalización lineal[13] —término introducido por Lee & Wheeler (ver Stacey, 1989)— es muy común en la literatura didáctica de origen anglosajón. Son problemas con las siguientes características: mediante dibujos que figuran en el enunciado, se dan varios objetos de diferentes tamaños ($n = 1, 2, \ldots$), los cuales tienen un número$f(n)$ de elementos; de esta forma se dan los primeros términos $f(1), f(2), f(3), \ldots$ de una progresión aritmética $f(n) = an + b, b \neq 0$, y se piden algunos términos $f(n)$. *Cuando* n es pequeño" se hablará de *generalización próxima* y cuando n es "grande" de *generalización lejana.* En esta clase de problemas aparece la *pauta lineal.* Como guía y evaluación de la actuación de los alumnos en las sesiones de aula y en las pruebas escritas, García planteó unas categorías referidas a la comprensión del contenido matemático (CM):

CM-1: Reconocer la diferencia constante, carácter iterativo de la pauta lineal.

CM-2: Expresar la relación para un cálculo.

CM-3: Extender tal relación a otros cálculos dentro de un mismo problema.

CM-4: Expresar verbalmente con relación a la sucesión la validez de la regla para un cálculo.

CM-5: Expresar verbalmente con relación al dibujo la validez de la regla para un cálculo.

CM-6: Utilizar datos disponibles para validar una expresión para el cálculo.

CM-7: Construir datos para validar la expresión para un cálculo.

---

[13] Conviene hacer aquí una precisión, pues lo que se denomina con el término "lineal", corresponde con una función afín, mientras que lo que se denomina "de proporcionalidad directa" corresponde a una función lineal en la terminología matemática habitual.

CM-8: Distinguir una regla para el cálculo con diferencia constante de otra sin diferencia constante.
CM-9: Simbolizar mediante expresiones literales la regla para el cálculo.
CM-10: Simplificar la regla para el cálculo.
CM-11: Expresar acciones sobre la sucesión que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.
CM-12: Expresar acciones sobre el dibujo que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

Stacey (1989, citado por García, 1998) estudia los métodos y la consistencia en el uso del método, utilizados por alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 13 años, en problemas de generalización lineal. Entre los principales hallazgos del trabajo de Stacey se encuentra la clasificación de los métodos utilizados por los estudiantes en las siguientes categorías:
Recuento: Contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.
Diferencia: Se asume de forma implícita que la adición repetida implica que $f(n) = an$
Whole-object[14]*:* Se asume implícitamente que $f(mn) = mf(n)$.
Lineal: Utilización de una pauta lineal, es decir, se reconoce que tanto las operaciones de suma y multiplicación están involucradas y que, además importa el orden en que se realizan las operaciones. Se asume implícitamente que $f(n) = an + b, b > 0$.

Un resultado importante reportado en el trabajo de Stacey hace referencia a que los alumnos más experimentados muestran, en su explicación escrita, cierta relación entre la pauta numérica y la pauta espacial, es decir, se nota una cierta influencia del dibujo en el desarrollo de la estrategia por los alumnos.

En dos estudios elaborados por Orton & Orton (1994, 1996, citado por García, 1998) se utilizan mayoritariamente problemas con pautas lineales y cuadráticas, acompañados también de diagramas ilustrativos. Los objetivos eran proporcionar evidencia sobre

[14] Objetual-global

habilidades y competencias mostradas por los sujetos en situaciones con pautas, además de señalar algunos obstáculos para tales habilidades y competencias.

Las conclusiones del primero de los estudios sugieren que la generalización tiene lugar a más de un nivel: algunos sujetos son capaces de utilizar métodos generalizables para calcular los términos de una sucesión particular, pero sus habilidades no les permiten extender tales métodos a las siguientes sucesiones. Sin embargo, otros sujetos sí muestran tal habilidad. Con respecto a la relación entre n y $f(n)$, algunos estudiantes muestran un nivel de generalización que sólo les permite aportar soluciones numéricas, otros son capaces de resumir relaciones utilizando palabras y pocos fueron capaces de convertirlas en formas algebraicas reconocibles. Uno de los estudios contemplados en este primer trabajo se realizó con estudiantes de edades comprendidas entre los 9 y 13 años. En él se utilizó material concreto, "palillos", y se esperaba que el manejo de tal material en la experiencia, serviría de ayuda a los alumnos. No obstante, el estudio muestra que una vez que los números asociados a los diagramas se hicieron explícitos, los alumnos abandonaron el trabajo con el material concreto y se concentraron en las pautas puramente numéricas.
En este primer trabajo (Orton & Orton, 1994) se señala un intento de definir diferentes habilidades de generalizar. Por un lado, la *extensión de la generalidad* como el empleo de un método correcto de generalización dentro de una tarea y en diferentes tareas. De otra parte, la *expresión de la generalidad* de tres formas distintas, desde las simples estructuras de los cálculos hasta las expresiones algebraicas, pasando por la formulación con palabras de las relaciones encontradas. En el segundo trabajo (Orton & Orton, 1996) se abandonan los formatos pictóricos y mediante tareas contextualizadas, que conllevan pautas lineales y cuadráticas, se definen unos estadios y niveles en el desarrollo de las habilidades de generalización en alumnos de edades entre 10 y 13 años.

El estudio llevado a cabo por Pretexto (1999) caracteriza la variable como problema puntual en matemáticas, sugiere algunas actividades que posibilitarían, de acuerdo con la orientación dada por el profesor, el desarrollo de procesos de generalización y simbolización. Los hallazgos de este Grupo ponen en evidencia que la variable (Pretexto, 1999, p. 83): (i) pertenece siempre a un universo, y desde él debe ser interpretada; (ii) el significado de variar que se le adjudica, corresponde al hecho que ella es representación, indistinta y simultánea, de los distintos individuos que conforman su universo; (iii) aparece siempre haciendo parte de una expresión, que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de su universo; (iv) el universo al que pertenece, sin ser tiempo, está implícitamente connotado de éste. En otras palabras, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura.

Para Calvo (2001) no existen elementos que distingan los procesos involucrados cuando un sujeto está desarrollando actividad matemática, en procesos avanzados y procesos elementales. Abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, generalización, formalización, demostración, son procesos que no están confinados en la etapa avanzada de las matemáticas, lo que varía de una a otra es el peso y la frecuencia de su uso. Calvo, en su tesis doctoral, justifica la importancia de desplegar un trabajo en procesos como el de generalización, lo cual producirá más adelante, en la etapa secundaria y universitaria, el abordaje comprensivo de ideas matemáticas.

Galperín (1959, citado por Montealegre, 2005), en su teoría y método de “la formación de acciones mentales”, diferencia cinco niveles de formación de la acción:
- *la base orientadora de la acción*, es decir, las necesidades, los motivos y las tareas
- *apoyo de la acción en objetos materiales* (dibujos, diagramas, cálculos)
- *la acción basada en el lenguaje hablado social con apoyo de las representaciones gráficas*
- *la acción conducida por el lenguaje externo, sin apoyo en objetos,* esto es, el habla se utiliza en la ejecución de la tarea, por lo que la acción debe ser desplegada y no abreviada
- *la acción se realiza en el plano menta*l, es decir, la acción se transforma en representación mental.

Montealegre (2005) refiere el trabajo de Galperín (1959) quien considera que la calidad de la acción mental es alta si existe mayor generalización, abreviación y dominio. La generalización de una acción significa distinguir entre sus diversas propiedades, aquellas necesarias para ejecutarlas adecuadamente. La abreviación permite formar la nueva noción o concepto de la realidad, por medio de la retención de los contenidos de la acción y del logro de un movimiento de orientación basado en relaciones objetivas. El dominio ocurre sólo en el curso de la acción; lo importante es poder discernir lo fundamental y lograr una internalización de las operaciones o del procedimiento en forma abstracta.

Kieran (2006), en relación con los trabajos que consideran el álgebra como actividad de generalización, reporta algunas investigaciones pioneras del PME (Psychology of Mathematics Education) en relación con el uso de la notación algebraica como una herramienta para la expresión de lo general y de patrones de figuras. A continuación describimos los reportes realizados por Kieran (2006).

Lee (1987) y Lee & Wheeler (1987) encuentran que pocos estudiantes usan álgebra o aprecian su papel en justificar un enunciado general acerca de números. Similares hallazgos han sido reportados por MacGregor & Stacey (1993), quienes identifican una dificultad en los estudiantes la cual reside en su incapacidad para articular claramente la estructura de un patrón o relaciones usando lenguaje ordinario. Arzarello, Bazzini & Chiappini (1994) encuentran que estudiantes que pudieran expresar los elementos de un problema mediante el uso de lenguaje natural fueron incapaces de expresarlos en lenguaje algebraico.

En el trabajo de Healy & Hoyles (1999) se pone de manifiesto que la aproximación visual en tareas de generalización utilizando patrones de cerillos puede proporcionar un gran soporte para la representación algebraica de secuencias, aporta elementos para desarrollar marcos conceptuales para el trabajo con funciones y subraya la necesidad de un trabajo fuerte para conectar patrones numéricos observados con la forma simbólica.

Ainley, Wilson & Bills (2003) compararon la generalización de contexto (asociada con los patrones figurales) con la generalización de cálculo (referida a las relaciones entre los números en una secuencia numérica) y encontraron que la generalización del contexto no parece ser suficiente apoyo a los niños para moverlos a una versión simbólica de la regla. Radford (2000), quien ha estudiado la transición de lo particular a lo general ha argumentado que tal proceso toma tiempo. Garuti, Boero & Lemut (1998), en un estudio que incluyó problemas del tipo “Pruebe que la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 4”, encontraron que los estudiantes necesitaron aprender gradualmente cómo explorar y transformar el enunciado dado para construir una prueba.

El trabajo de Sasman, Olivier & Linchevski (1999) indaga sobre el papel de las representaciones tabulares con actividades de generalización en las que se variaron el tipo de función, la naturaleza de los números, el formato de las tablas y la estructura de las imágenes. Los resultados mostraron que variar estos elementos tuvo poco efecto en el pensamiento de los estudiantes.

En el estudio realizado por Talizina (2008), se presenta la consideración de diferentes aproximaciones hacia el estudio del problema de la generalización. En el trabajo se analiza la dependencia de las características particulares sometidas a la generalización, de su lugar en la estructura de la actividad del sujeto. En el estudio se incluyeron dos grupos de niños de 5 años a 6 años y 9 meses de edad. El primer grupo estuvo integrado por niños con desarrollo intelectual normal, mientras que el segundo grupo lo integraron niños con retardo del desarrollo intelectual. Los resultados muestran que la generalización se da solamente de acuerdo con aquellas características de los objetos que se incluyen en el contenido de la base orientadora de la acción. Esta orientación incluye las necesidades, los motivos y las tareas. El propio objeto de la actividad se presenta al sujeto como capaz de satisfacer determinada necesidad. Talizina muestra que la generalización no se determina por los objetos, sino que se mediatiza por la actividad del sujeto con estos objetos, a la vez que considera las aproximaciones básicas que se utilizan en los estudios sobre la generalización, a saber:

Primera aproximación: se dirige la atención principalmente a las características de los objetos reales, de acuerdo a las cuales se da la generalización: desde el punto de vista de su naturaleza física, su significado en la solución de problemas, etc.

Segunda aproximación: se enfatiza el estudio del papel de diversos factores en el proceso de generalización: el papel de la palabra y el papel de variaciones en las características irrelevantes.

Bruner y Austin (1956, citados por Talizina, 2008), identifican una serie de condiciones que influyen en la actividad que conduce a la generalización: las particularidades de la comprensión del problema al que se enfrenta el sujeto; el carácter de los ejemplos que encuentra en el proceso de generalización; las consecuencias esperadas de las acciones que realiza; el carácter de las limitaciones que se presentan durante la actividad del sujeto; las particularidades de la valoración de las acciones que se realizan.

En relación con los trabajos de investigación que estudian las condiciones que influyen de manera positiva sobre la actividad de la generalización, se encuentra que es fundamental el análisis de la dependencia del proceso de la generalización, de las partes estructurales y funcionales de la acción del sujeto. Así, los datos de Zaporozhets, Zinchenko & Elkonin (1964), y Poddyakov (1977), citados por Talizina (2008), establecieron que el proceso de generalización es dependiente del carácter de las acciones de orientación que se dirigen a los objetos que se generalizan.

Los estudios e investigaciones llevados a cabo por Radford desde la perspectiva-semiótica cultural (1996, 1997, 2000a, 2000b, 2002, 2003, 2004, 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2010a, 2010b, 2010c, 2012a) sugieren profundizar los procesos de generalización algebraica en estudiantes jóvenes. En estas investigaciones se abordan secuencias figurales apoyadas por representaciones tabulares y secuencias numéricas también con apoyo tabular. En términos generales, es importante destacar que la generalización es una actividad no exclusiva de las matemáticas, caracteriza todas las formas de conocimiento científico y no científico. Sin embargo, en matemáticas consiste en alcanzar esquemas generales de pensamiento. Radford (1996) plantea que la generalización es un procedimiento que lleva a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. De esta manera, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación.

Más adelante el mismo autor (Radford, 2005b) señala que generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. Los objetos y signos utilizados para objetivar el saber son, lo que ha denominado Radford, *medios semióticos de objetivación.*

1.2.3 Una síntesis preliminar. Esta revisión sobre el pensamiento algebraico y la generalización en la didáctica de las matemáticas muestra un horizonte de estudios e investigaciones que han abordado estos aspectos. Se observa, por ejemplo, que varias de estas investigaciones se han ocupado de errores de los estudiantes en el dominio de la sintaxis algebraica; otras por su parte plantean sugerencias de cambio curricular que proponen actividades didácticas para desarrollar el pensamiento algebraico. El problema de indagar sobre la "anatomía" del proceso de generalización y específicamente sobre el proceso de generalización de patrones está vinculado con la idea de pensamiento algebraico.

Es necesario señalar que si bien se dispone ya de ciertos resultados acerca de la emergencia del pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes frente a tareas basadas en patrones figurales (e.g., los trabajos abundantes de Radford, 2003, 2004, 2004a, 2004b, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2010a, 2010b), se conoce muy poco o casi nada acerca de la emergencia del pensamiento algebraico y las dificultades de los estudiantes jóvenes ante tareas como las secuencias puramente figurales y puramente numéricas. Más aún, en términos del profesor Radford, la investigación debería ofrecer aportes en relación con discusiones epistemológicas sobre las generalizaciones observadas en secuencias numéricas y ahondar en la comparación de formas de pensamiento algebraico que podrían emerger de tareas basadas en secuencias no figurales y figurales.

Todavía no hay una definición concisa del pensamiento algebraico y ello puede muy bien deberse a la amplia gama de objetos algebraicos (por ejemplo, ecuaciones, funciones o patrones) y los procesos y las *distintas formas posibles de concebir pensamiento en general*. La tarea de caracterizar el pensamiento algebraico es todavía ardua. Se han planteado muchas discusiones en torno al tema. Luis Radford, incluso, llama la atención sobre los debates celebrados en los años 1980 y 1990 (Radford, 2010a), en los cuales era imposible ponerse de acuerdo sobre un conjunto mínimo de características sobre este tipo de pensamiento.

La revisión de investigaciones aquí presentada coincide con la apreciación de Radford. Según este autor estas investigaciones condujeron a una pregunta inevitable y difícil que se plantea una y otra vez: *el de la naturaleza del pensamiento algebraico.* No obstante, hay un consenso más o menos general en torno a dos aspectos: (i) el álgebra trata de objetos de una naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros, y (ii) en el álgebra los objetos se tratan en forma analítica, lo cual se traduce en que en álgebra se hacen cálculos con cantidades indeterminadas -es decir, sumar, restar, dividir, etc., incógnitas y parámetros- como si se conocieran, como si fueran números específicos.

Si bien el MEN (2006) sugiere abordar la idea de pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio, el estudio de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, al parecer, estos elementos hacen parte de la idea de pensamiento algebraico, que sin embargo nos parece todavía muy general en su caracterización. Por ejemplo, el MEN (2006) presenta sugerencias de actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria:

> Analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p. 67)

Este gran reto que impone tanto el MEN como los resultados de las investigaciones y estudios aquí revisados, sugiere indagar con mucho más cuidado elementos que, nos parece, han estado presentes, tales como: *pensamiento, pensamiento algebraico, actividad,* *mediación semiótica, cultura*, entre otros, elementos que son objeto de estudio en nuestro marco teórico.

Capítulo 2
Marco Teórico

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos y desarrollamos las ideas teóricas que dan sustento a la investigación. En la primera sección abordamos la idea de cultura y su importancia en los proceso de aprendizaje. Nos parece importante profundizar, en la segunda parte, en el concepto de mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotski y presentar su propuesta teórica acerca del desarrollo del pensamiento. La instrucción precede al desarrollo o, en otras palabras, el pensamiento se puede desarrollar, es una tesis revolucionaria en su estructura teórica y nos sirve como insumo en el tratamiento metodológico que abordamos en el siguiente capítulo.

De esta manera, con las ideas de cultura y mediación semiótica abonamos el camino para plantear, en la última sección, desde la postura de Radford (2006b, 2013a), la teoría cultural de la objetivación como una aproximación histórico-cultural. Presentamos, en la primera subsección los elementos iniciales y fundamentales de la teoría y luego, en la siguiente subsección, exponemos algunos elementos de orden filosófico fundamentalmente desde los trabajos de Hegel (1837/2001, 1817/2004) y Davydov (1981). En el desarrollo de esta teoría planteamos, en las siguientes subsecciones, la importancia del gesto como un medio semiótico de objetivación y los constructos de nodo semiótico y contracción semiótica, así como los elementos característicos del pensamiento algebraico y la generalización algebraica de patrones.

2.2 La idea de cultura en esta investigación y su importancia en los procesos de aprendizaje

La idea de cultura que en esta investigación queremos exponer viene de la perspectiva antropológica la cual establece que el sujeto que aprende es, también, un sujeto cultural, inmerso en una cultura de la cual hereda modos de actuar, de hablar y de razonar (Montagu, 1968). En tal sentido, el individuo parece no estar movido por un poder de auto determinación cuyos proyectos y significados emanan del individuo en cuestión, pues la cultura juega un papel importante en sus formas de pensar y de actuar.

Las aproximaciones socioculturales y antropológicas plantean un individuo contextual, cultural, concreto, cuya formulación de proyectos, modos de pensar y de actuar, y su producción de significados sólo tiene razón de ser dentro del espectro de posibilidades que la cultura pone a su disposición, a través de instituciones y sus inevitables redes de distribución de poder y saber. La producción de significados por parte de un sujeto dentro de una cultura en particular, encuentra asidero en la idea de *sujetos semióticos* en el sentido de Lamiell (2003, citado por Valsiner, 2012), quien con este constructo quiere enfatizar el hecho de que bajo todas las circunstancias de la vida, los seres humanos son constructores activos de significado.

El objetivo de una perspectiva antropológica de la educación es erradicar la separación entre la cognición y el contexto, en la investigación educativa. Como lo afirma Rosch (1975), es la cultura a través de la cual los seres humanos ‘ven la naturaleza‘, o, interpretando a Hegel (1817/2004), cultura quiere decir poder mirar las cosas desde el punto de vista del otro, lo cual significa, entre otras cosas, reconocer un sistema de significados construido por los individuos y compartido, que permite la comunicación.

La influencia de la cultura en el comportamiento de los seres humanos es resaltada por Gillin (1948, citado por Miranda, 2009, p. 178). Según este autor: “si conocemos la cultura y sus implicaciones de un hombre o de un grupo de hombres, podemos predecir una cierta parte de su comportamiento en circunstancias dadas en el futuro y explicar la mayoría de sus acciones en el pasado". De acuerdo con Miranda (2009, p. 29):

> Si se concibe a los estudiantes como individuos pertenecientes a una cultura determinada, la importancia del conocimiento de ésta no sólo permite predecir el comportamiento de los estudiantes, sino que también posibilita comprender la manera en que los científicos profesionales interpretan los fenómenos ocurridos en su entorno natural.

Coincidimos con Miranda (2009), en tanto el entorno cultural de los estudiantes tiene una historia y es deseable conocer dicha historia, su andamiaje y su evolución para poder tomar decisiones lo más acertadas posibles en términos de sus trayectorias de aprendizaje, poder valorar sus dificultades y concebir estrategias pedagógicas y didácticas para familiarizarlos con los objetos culturales.

De acuerdo con White (1959, p. 235), toda cultura se distingue por eventos (e.g., actitudes humanas, una conversación) y cosas (objetos físicos) que suceden en un espacio y un tiempo específicos:
(1) dentro de organismos humanos, es decir, conceptos, creencias, emociones, actitudes;
(2) dentro de procesos de interacciones sociales entre seres humanos; y
(3) dentro de objetos materiales (hachas, fábricas, vías de tren, tazones de cerámica), que se encuentran fuera de los organismos humanos, pero dentro de patrones de interacción social [existentes] entre ellos. White identifica a la *simbolización* como la característica principal de la existencia temporal y espacial de las cosas y de los eventos**.** Todos los objetos materiales, los conceptos, las creencias, las emociones y las actitudes adquieren significado en el momento en que los seres humanos interactúan entre sí.

El mismo Vygotski pretende explicar el desarrollo cultural del comportamiento en términos de la sociabilidad humana. Según Vygotski (1989, p. 145):

> Todo lo cultural es social. La cultura es, justamente, el producto de la vida social y de la actividad social del hombre y por ello el planteo mismo del

> problema del desarrollo cultural del comportamiento nos introduce directamente en el plano social del desarrollo.

Con este planteamiento, Vygotski pretende explicar el desarrollo cultural del comportamiento en términos de la sociabilidad humana. Por ejemplo, señala este autor, la génesis de los conceptos científicos en el niño ocurre, primero, en el plano social y, después, en el plano psicológico. Siguiendo a Miranda (2009), en forma metafórica, la adquisición del conocimiento científico en el niño puede ser considerada como un *segmento dirigido* que inicia en las personas que rodean al niño y termina en la mente de éste.

Coincidimos con Ratner (2000, p. 8) en señalar que los fenómenos culturales son hechos sociales que se crean de manera colectiva y compartida. De acuerdo con este autor, hay cinco clases principales de fenómenos culturales, a saber:

1. *Actividades culturales,* tales como producir comida, la crianza y la educación de los niños, suministrar cuidados médicos. Es a través de estas actividades que los seres humanos sobreviven y se desarrollan.
2. *Valores culturales, esquemas, significados, conceptos*, las personas colectivamente dotan las cosas con significado. La juventud, la tercera edad, hombre, mujer, la riqueza, la naturaleza y el tiempo significan cosas distintas en sociedades diferentes.
3. *Artefactos físicos*, tales como herramientas, juguetes, juegos, armas y tecnología los cuales son colectivamente construidos.
4. *Fenómenos psicológicos,* tales como las emociones, la percepción, motivación, el razonamiento lógico, la inteligencia, la memoria, la imaginación, el lenguaje y la personalidad son colectivamente construidos y distribuidos. Este fenómeno cultural sintoniza bien con una de las tesis de Vygotski según la cual los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales.
5. *Agencia.* Los seres humanos activamente construyen y reconstruyen fenómenos culturales. Esta agencia está dirigida a construir fenómenos culturales y es también influenciada por la existencia de actividades culturales, valores, artefactos y la psicología.

Ratner (2009) puntualiza que estos cinco fenómenos culturales, además de ser distintivos, son interdependientes y están entrelazados. Ninguno es reducible a los otros. Junto con esta configuración integrada de fenómenos culturales, según este autor, las actividades culturales son las más influyentes y ello encuentra explicación por el hecho de que este tipo de actividades se constituye en el medio a través del cual las personas sobreviven y se desarrollan.

La cultura, por lo tanto, podemos caracterizarla como el complejo que sirve para nombrar el cúmulo de conocimientos, conceptos, técnicas, actividades, creencias y valores, expresados en símbolos y prácticas, que caracterizan a cualquier grupo humano, y que suele transmitirse -aunque no mecánicamente- en el tiempo (de una generación a otra) y en el espacio (de un lugar a otro). Afirmación que encuentra sustento en Guillin (1948) para quien todas las culturas elaboran formas científicas que les permiten explicar su entorno cultural.

Por ejemplo, en particular, las formas de argumentación, de explicación, de los estudiantes son manifestaciones de una cultura cuyo método de entender el mundo se basa en la postulación de hipótesis y conclusiones. Por ejemplo, Maddock (1981) analiza finamente cómo a partir del lanzamiento del satélite ruso artificial Sputnik, en 1957, la educación de la ciencia y, en consecuencia, las formas científicas de argumentación fueron incluidas en el modelo educativo de América del Norte. Este es uno de los ejemplos por el cual puede afirmarse que las formas de argumentación de los estudiantes son culturales, es decir, la cultura permea una cierta realidad. Ramos (1936) lo plantea mejor: “Se desconoce la noción de que [la cultura] es una función del espíritu destinada a humanizar la realidad” (p. 18).

A manera de corolario, podríamos afirmar que la cultura es consustancial al conocimiento. Por ello, como plantea Radford (2004b), uno de sus papeles es sugerir a los sujetos formas de percibir la realidad y sus fenómenos, formas de apuntar o formas de intuición como lo diría Husserl (1931). Las formas de conocer y lo que conocemos hoy en día, señala este investigador, lleva consigo las trazas y los sedimentos de formas históricas y culturales; en otras palabras, en el mismo acto de conocimiento están operando, y no de manera accidental, Sistemas Semióticos de Significación Cultural, en este sentido tiene razón Vygotski (1989), en tanto se piensa con y a través de los signos.[15]

Cole (1999, citado por Kozulin, 2000) llegó a la conclusión de que las consecuencias cognitivas de la educación formal y del empleo de los instrumentos psicológicos asociados con ella no tienen un carácter absoluto, sino que dependen en gran medida de la estructura de las actividades predominantes en una cultura o una subcultura dada.

Según Kozulin (2000), en las teorías de Vygotski se considera que el agente (individuo que actúa con instrumentos culturales) se extiende más allá del individuo. Esta extensión se da de dos maneras principales: (a) el agente suele ser más una propiedad de las díadas y de otros grupos pequeños que de los individuos, y (b) los instrumentos culturales simbólicos que median en la acción humana están conectados intrínsecamente con los contextos históricos, culturales e institucionales, extendiendo el agente humano más allá de un individuo dado.

La argumentación desarrollada en esta sección hace necesario y pertinente plantear el tema de la mediación semiótica en el sentido de Vygotski, así como su vínculo con el desarrollo del pensamiento, dos aspectos importantes en esta investigación.

2.3 La mediación semiótica de Vygotski y su influencia teórica sobre el desarrollo del pensamiento

La idea de signo en los planteamientos de Vygotski es fundamental dentro de su teoría psicológica y, aún más, es necesario profundizar en ella si deseamos aproximarnos, en parte, al sentido del desarrollo de su obra. Un principio básico en sus ideas al respecto, sugiere que el signo mediatiza la relación del ser humano con otro y la relación del ser humano consigo mismo. Cárdenas (en prensa) plantea que desde la perspectiva de la comunicación, la mediación instaura las intenciones, puntos de vista, perspectivas,

[15] La idea teórica de Sistemas Semióticos de Significación Cultural será presentada en el apartado 2.4.1.

modalidades y estrategias con que nos comunicamos. Por ello la mediación lingüística es una condición sine qua non de la manera como el sujeto se sitúa en el mundo y se relaciona con los demás, a través de actos de conciencia, conocimiento, conducta y comunicación.

Podríamos afirmar que estos cuatro actos hacen emerger el concepto de interés, pues éste regula el entendimiento, modula la razón teórica y la razón práctica y configura el campo de la experiencia; de ahí sus vínculos estrechos con la mediación. Según Cárdenas (en prensa), la mediación, desde la conciencia, le da piso al sentido, marca la disposición del lenguaje hacia un cierto objeto desde un sujeto que hace y decide de manera deliberada y responsable. Por tanto, el signo cumple el papel de una operación significativa. Aún más, los signos *no se limitan únicamente a su función representativa*,[16] la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación.

Dicha relación epistemológica es vista, entonces, de tal forma que el objeto de conocimiento es inseparable de la actividad de los individuos. Según Cole (1999), Marx sostenía que el objeto producido no es algo simplemente externo e indiferente a la naturaleza del productor: es su actividad en una forma cosificada o petrificada. El exterior, histórica y culturalmente constituido, es el que provee el material de base con el cual se van formando los individuos y los conocimientos que éstos forman a través de procesos sociales de interiorización. Esta idea de interiorización la entendemos en el sentido de Vygotski, como un proceso de formación de la mente a través de la interacción social, proceso en el cual se conserva el carácter social de las funciones externas al hacerse internas; de esta manera es posible aseverar que las funciones psicológicas superiores son internalizadas desde lo social.

Para comprender el significado de los signos, no los podemos reducir simplemente a lo que ellos representan. Debemos comprender el tipo de actividad que ellos permiten realizar. Éste sería un argumento que nos faculta a afirmar que los problemas de los estudiantes no están solamente en las estructuras semióticas complicadas que ellos deben manejar sino

[16] El énfasis es mío.

principalmente en el sistema de prácticas asociadas con estas representaciones semióticas. D´Amore (2001) señala que no basta construir un sistema de reglas para los signos y hacerlo explícito, posibilitando operar correctamente marcas en un papel, sino que se debe asignar sentido a la operatividad del signo.

De acuerdo con la perspectiva de Vygotski, los signos se interponen entre cualquier función natural psicológica del ser humano y su objeto de saber, *cambiando de raíz las propiedades de dicha función*. Según Vygotski (1931/2000, p. 123) “en la estructura superior el signo y el modo de su empleo es el determinante funcional o el foco de todo el proceso”. Lo mismo que la utilización de una u otra herramienta determina todo el mecanismo de la operación laboral, así también el carácter del signo utilizado constituye el factor fundamental del que depende la construcción de todo el proceso.

Pero por otro lado, Vygotski (1931/2000, p. 146) sostiene que: “el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan sólo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo”. Vygotski quiere señalar que más allá de influenciar la conducta de los demás, el signo adquiere la peculiaridad de ser un instrumento que transforma al sujeto mismo. De aquí que podríamos hablar de la condición procesual del significado de un signo (Vygotski, 1987), en el sentido de que el significado no se descubre, sino que él mismo se materializa, gesta y transforma durante una situación comunicativa singular gracias al intercambio lingüístico establecido por los usuarios entre sí. En otras palabras, el término signo es utilizado por Vygotski con el sentido de poseedor de significado (Wertsch, 1985/1988, p. 34). De aquí que la base estructural de las formas culturales del comportamiento es la actividad mediadora (Vygotski, 2000), la utilización de signos externos como medio para el desarrollo ulterior de la conducta.

En esta misma dirección, Castorina & Carretero (2012, p. 30) al plantear el papel que juegan los signos en la cognición, señalan que “la incorporación de signos en el pensamiento transforma el grado de elaboración cognitiva”. En una discusión que intenta aclarar lo semiótico, Castorina & Carretero (2012) plantean que a pesar de sus divergencias respecto del papel que tienen los signos en el pensamiento, tanto Piaget con su función semiótica como Vygotski con su mediación semiótica incorporan una variedad de signos, sin distinguir sus particularidades ni su complejidad cognitiva.

Un aspecto importante que establecen estos dos autores es “el grado en que los signos están integrados en un sistema” (Castorina & Carretero, 2012, p. 30). Esto significa, indudablemente, una afectación en la cognición, pues los signos pertenecen a un sistema que tiene reglas y conlleva un sistema de significación. Más precisamente, Castorina & Carretero (2012) afirman que:

> La creación y utilización de un signo particular por parte de una persona, por importante que sea, no es comparable con el uso de signos que pertenecen a un sistema y cuyos significados están determinados por un conjunto de reglas. La complejidad de significados y el valor instrumental de unos y otros no es comparable. Los signos que forman parte de un sistema establecen un entramado semántico complejo y su uso repercute de forma profunda en la cognición. Además, si pensamos en las necesidades educativas, los sistemas de signos (como la escritura y la notación matemática) se han convertido en objetos de enseñanza. Su importancia cultural es innegable. (pp. 30-31)

Esta afectación en la cognición la interpretamos desde Vygotski (1929), pues para este autor toda la estructura de los procesos que despliega un sujeto estará determinada por el carácter de los medios (por ejemplo, signos, artefactos) que ha seleccionado para llevar a cabo dichos procesos. La afectación de la cognición humana tiene asidero en la idea de *plasticidad semiótica*[17] de la mente humana (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013, p. 82) refiere a la “capacidad de ésta de ser modificada por el uso de los signos”. Sin embargo, esta complejidad cognitiva no obedece solamente a los sistemas de signos en sí mismos. Nos parece fundamental señalar que si bien el signo refleja, porque la representación es su característica, ella no es simple ni directa. La representación está preñada de prácticas sociales y acuerdos culturales.

[17] El énfasis es mío.

En la *concepción arquitectónica del signo*, Bajtín (1929/1992) afirma que éste adopta maneras de representar, adopta acentos típicos de la manera de participación social de los usuarios, para lo cual entra en el universo de lo axiológico, de la valoración, de lo ideológico. En este sentido, la conciencia sólo deviene conciencia al llenarse de un contenido ideológico, es decir, sígnico y, por ende, sólo en el proceso de interacción social (Bajtín, 1929/1992). El enunciado, afirma Bajtín, dice del sujeto; esta *"psicología del cuerpo social"* bajtiniana hace visible el horizonte social y cultural en donde vive.

En esta dirección se inscriben los orígenes sociales de los procesos psicológicos superiores que Vygotski matiza en términos del funcionamiento interpsicológico, tal y como se refleja en su formulación de la ley genética del desarrollo cultural:

> Cualquier función, presente en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces o en dos planos distintos. En primer lugar aparece en el plano social, para hacerlo, luego, en el plano psicológico. En principio, aparece entre las personas y como una categoría interpsicológica, para luego aparecer en el niño como una categoría intrapsicológica. Esto es igualmente cierto con respecto a la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos y el desarrollo de la volición. Podemos considerar esta argumentación como una ley en el sentido estricto del término, aunque debe decirse que la internalización transforma el proceso en sí mismo, cambiando su estructura y funciones. Las relaciones sociales o relaciones entre las personas subyacen genéticamente a todas las funciones superiores y a sus relaciones. (Wertsch, 1988, pp.77-78)

De esta formulación podemos destacar, al menos, dos aspectos. Por un lado, la idea de *internalización* insta a pensar que no es posible establecer la relación entre los dos planos en términos de reflejo, esto es, no parece colegirse un "modelo transferencial de internalización" (Wertsch, 1985/1988, p. 80). Muy al contrario, para Vygostki los procesos psicológicos superiores internalizados (pensamiento lógico, la deducción, la abstracción, la categorización, la generalización, entre otros) no son meras copias de procesos externos interpsicológicos, pues como bien lo anota el mismo autor, la internalización transforma el proceso en sí cambiando su estructura y funciones. Los instrumentos con que mediatizamos la actividad humana, aparte de cumplir su función pragmática de permitirnos llevar a cabo la actividad misma, son fundamentalmente importantes en tanto que afectan y alteran nuestras funciones psíquicas superiores.

Según Kozulin (2000), Vygotski trazó una primera distinción entre los procesos mentales naturales "inferiores" de la percepción, la atención, la memoria y la voluntad, y las funciones psicológicas culturales "superiores" que aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos. Las funciones inferiores no desaparecen, sino que son sustituidas e incorporadas a las culturales. De ahí la importancia de los problemas que proponemos a los estudiantes, por cuanto como afirma Vygotski (1929), si la tarea o el problema no están por encima de las capacidades naturales del niño, él puede dominarlos por el método natural o primitivo.

Por otro lado, la idea de *desarrollo,* lejos de ser ingenua en los planteamientos de Vygotski, cobra especial relevancia en su teoría del desarrollo genético. De acuerdo con Wertsch (1985/1988), Vygotski define el desarrollo en términos de aparición y transformación de las diversas *formas de mediación.* Esta noción de desarrollo y su relación con los procesos psicológicos superiores implican necesariamente *mecanismos semióticos*. Es claro que para Vygotski el desarrollo es considerado en términos de *saltos revolucionarios* fundamentales más que en términos de incrementos cuantitativos constantes.

Es más, él defendió los puntos principales del desarrollo en términos de los cambios experimentados en la forma de mediación utilizada, esto es, en las acciones del sujeto a través del uso de instrumentos de mediación semiótica. Afirma Noel (1995, p. 81):

> […] la mediación en general toma un nuevo significado. La esencia deja de confundirse con el movimiento mismo de la reflexión; es, de cierta manera, el elemento donde se produce el movimiento y lo hace posible. Las determinaciones de la reflexión dejan de flotar, por así decirlo, en el vacío y encuentra un soporte en la esencia.

La idea de desarrollo para Vygotski tiene sus vínculos estrechos con su idea de signo. Coincidimos con Wertsch (1985/1988) en señalar que los tres temas que constituyen el núcleo de la estructura teórica de Vygotski son:

1) *la creencia en el método genético o evolutivo*
2) *los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales,* y
3) *los procesos mentales o cognitivos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan como mediadores*.

La creencia en el método genético, de acuerdo con Vygotski, significa que el pensamiento se puede desarrollar. Vygotski se centró en estudiar cómo el funcionamiento interpsicológico podía ser estructurado de tal manera que maximice el crecimiento del funcionamiento intrapsicológico (Wertsch, 1985/1988). "La instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo. Entonces despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración" (Wertsch, 1985/1988, p. 87).

En su trabajo sobre *"El problema del desarrollo cultural del niño*", Vygotski (1929) deja entrever que cuando deliberadamente interferimos en el curso de los procesos de comportamiento, podemos hacerlo sólo de conformidad con las mismas leyes que rigen estos procesos en su curso natural. La inclusión en cualquier proceso de un signo, plantea Vygotski (1929), remodela toda la estructura de las operaciones psicológicas, así como la inclusión de una herramienta remodela toda la estructura de una operación de trabajo.

Las fronteras entre el funcionamiento social y el individual son bastante permeables en su descripción y su énfasis está puesto en las transformaciones entre los procesos intermentales (interpsicológicos) e intramentales (psicológicos) más que en la brecha que los separa. La composición de las funciones psíquicas superiores (Wertsch, 1998), su estructura genética y sus medios de acción, esto es, sus formas de mediación, en una palabra, toda su naturaleza, es *social*. Aun cuando nos afinquemos en los procesos psíquicos (internos), debemos reconocer que su naturaleza permanece cuasi-social. En su propia esfera privada, los seres humanos retienen las funciones de la interacción social.

Desde la perspectiva de Vygotski, el funcionamiento intramental es social no sólo por estar situado socioculturalmente, sino también porque como bien lo señala Wertsch (1998), retiene las funciones de la interacción social. Por ejemplo, muchas formas de resolución de problemas en el nivel individual son consideradas inherentemente dialógicas debido al hecho de que derivan de la participación en encuentros dialógicos en el plano intermental (Wertsch, 1985/1988). Esta declaración se entiende siempre y cuando se acepte que para Vygotski las formas de discurso dialógico que median en los procesos intermentales son usadas para conformar el plano intramental.

En esta dirección, la *intersubjetividad* se relaciona con la medida en que los interlocutores de una situación comunicativa comparten una perspectiva. Desde un punto de vista fenomenológico, Bajtín (1929/1992) examina esta idea desde la concreta relación *yo-otro.* De entrada, el énfasis en el sujeto como un ente social pone en cuestión el concepto mismo de identidad, al introducir la categoría de la alteridad como parte constituyente del yo, como su antecedente obligado y referente necesario. Al sujeto se le concibe más allá del eje egocéntrico, para ubicarlo en la red de relaciones dialógicas que establece consigo mismo y con la alteridad (en realidad, con una multiplicidad de otros).

El yo no puede comprenderse íntegramente sin la presencia del otro, sin la actuación del otro, sin el discurso del otro. La identidad pierde así su eje egocéntrico y monológico; se vuelve heteroglósica, se constituye a partir de distintas voces. Identidad y alteridad se entienden entonces como conceptos interdependientes, complementarios, de una naturaleza relacional y relativa.

Wertsch (1998), inspirado en el trabajo de Ragnar Rommetveit, al referirse a la categoría de intersubjetividad, plantea:

> El problema básico de la intersubjetividad humana se vuelve […] una cuestión que tiene que ver con qué sentido y bajo qué condiciones dos personas que se involucran en un diálogo pueden trascender sus mundos privados diferentes. Y la base lingüística para esta empresa no es, según sostengo, un repertorio fijo de significados "literales" compartidos, sino bosquejos muy generales y parcialmente negociados de contratos concernientes a la clasificación y atribución inherente al lenguaje ordinario. (Rommetveit, 1979, citado por Wertsch, 1998, p. 177)

La idea de intersubjetividad, a nuestro juicio, se encuentra íntimamente relacionada con la idea bajtiniana de *dialogía* (Bajtín, 1929/1992), según la cual el acto discursivo obedece a un carácter responsivo y no sólo significativo. Las ideas de Bajtín sugieren que el enunciado encarna otros enunciadores. He ahí el vínculo con la historicidad propuesta por Vygotski en las prácticas sociales y en el lenguaje. Por lo que para Bajtín, la relación entre sujetos tiene como marco global al *dialogismo,* que de paso sea dicho, se constituye en el principio filosófico central de su concepción del lenguaje y de la vida social en su conjunto.

En la obra del filósofo, los significados del dialogismo son diversos, pero un punto de partida para su comprensión es su etimología, que refiere a la interacción de dos o más *logos,* cada uno con sus propios marcos axiológicos, voliciones y posicionamientos. El enunciado, el discurso, y en general su concepción global de la comunicación humana, derivan todos del principio dialógico, de la fundante relación yo-otro. Al respecto García (2006, p. 50) afirma que:

> [...] recordemos que una teoría bajtiniana del discurso afirma que no sólo se trata de lo que acontece "al interior" de nuestra propia conciencia, sino en la frontera de la conciencia de otro sujeto cabal, completo, precisamente en el umbral. Para Bajtín, el más alto grado de socialidad estriba en el hecho de que cada experiencia interna, cada sujeto, termina por toparse con otro. Toda la "ontología del yo" en el sentido bajtiniano se dialogiza, en primera instancia, en

> esta frontera, y no puede realizarse más que en este lugar de encuentro lleno de tensiones. El sujeto siempre es el producto de su interacción con otros sujetos.

En esta perspectiva, la comunicación humana como acontece en la vida real no es un mero intercambio de mensajes basado en un código compartido y en un consenso de sentido, sino que, por el contrario, se trata siempre de una *tensión vital entre logos* fundamentalmente distintos, cada uno con su propia posición axiológica respecto al mensaje, a su objeto, al código, al emisor, así como a los contextos de interacción.

El sentido de un enunciado, nos enseña Bajtín, incluye la respuesta del receptor y no se realiza tomando las palabras mecánicamente, como si fuesen entradas de diccionario, colocadas una tras otra de acuerdo con reglas sintácticas, sino como elementos cargados de valoraciones sociales, puestas en juego en el proceso de la comunicación interdiscursiva.

Bajtín (1929/1992) señala cómo desde la temprana adquisición del lenguaje y a lo largo de la vida, el hombre se inicia como un ser social y se desarrolla como tal construyendo su individualidad a partir del otro, de las acciones y del discurso del otro, para continuar con éste una íntima y compleja relación. El sujeto social se forma discursivamente, en el proceso comunicativo de yo con el otro, es decir que el discurso propio se construye en relación con el discurso ajeno, en el proceso de una íntima y constante interacción. Las respectivas identidades se construyen en el proceso de la comunicación interdiscursiva. Así pues, en Bajtín el ser presenta un carácter intrínsecamente dialógico, *"ser es ser para otro y a través del otro para mí"*.

Por supuesto, el lenguaje pasa a ser entendido, entonces, como un aspecto nuclear de la constitución subjetiva de la persona, en la medida que establece un nudo entre el orden de lo psicológico y el orden de la cultura, a través de los significados. El lenguaje no es ni un mero "compañero" de las acciones, tampoco un simple medio de expresión de ideas, es un instrumento para transformar la realidad (Kozulin, 2000) y hacer que, a cuentas de ser algo dado, sea algo que se está desarrollando. Estos elementos claramente desvirtúan la idea representacionista que tal vez algunos autores le han querido conferir solamente al lenguaje.

El papel del lenguaje nos parece fundamental, lejos de esa idea representacionista. Más aún, para la comprensión del papel de la educación en el desarrollo del sujeto social, considerar el lenguaje es clave, dada la estrecha relación que éste tiene con el desarrollo del pensamiento y del conocimiento (Vygotski, 1934/2007). En esta perspectiva, tomando el lenguaje como potencial semiótico y noético (Duval, 1995/1999), es posible reconocer, en él, tres dimensiones (Calderón, 2005):

- La *ética*, que vincula sujeto discursivo y aspectos de tipo normativo, axiológico y actitudinal de la comunicación y de la significación compartidas socialmente.
- La *psicológica*, considerando el lenguaje como acción humana, que pone en juego aspectos de tipo cognitivo y de tipo semiótico e informativo; es decir, el desarrollo de procesos de significación que exigen el permanente proceso de semiotización.
- La *social*, que destaca las funciones comunicativa e interactiva del lenguaje.

Estas tres dimensiones, que sólo separamos para propósitos analíticos, están presentes en toda producción y desarrollo discursivo; de ahí la importancia de considerarlas en aras de la comprensión de los distintos aspectos manifiestos en la discursividad de los hablantes. Discursividad que por supuesto no está ajena de los instrumentos de mediación semiótica que el sujeto pone en acción. De esto advierte Wertsch (1991, p. 46):

> Contrastando con muchos análisis contemporáneos del lenguaje, con su acento puesto en la estructura de los sistemas de signos, con independencia de cualquier función mediadora que puedan cumplir, Vygotski encaró al lenguaje y otros sistemas de signos como parte y como mediadores de la acción humana.

Podemos inferir que la principal característica distintiva del aprendizaje y el desarrollo psicológico del ser humano, según Vygotski, reside en la intervención de instrumentos psicológicos simbólicos en este proceso. Los signos, los textos escritos, los sistemas numéricos, las fórmulas, los gráficos y otros recursos simbólicos, modifican radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos con la ayuda de estos *instrumentos culturales*.

En este sentido, los canales por donde transita la interacción entre individuos, ya se encuentran moldeados por formas culturales de discurso que son a la vez productoras y reguladoras del saber, en otras palabras, las maneras de conocer y lo que conocemos hoy en día lleva consigo las trazas y los sedimentos de formas históricas y culturales, formas que "contaminan" los procesos psicológicos. Pero, *¿cuál es el origen de estos procesos psicológicos?, ¿desde dónde fundamenta Vygotski esta idea?*

Nos parece importante subrayar que Vygotski asume una perspectiva marxista en la elaboración de su idea de procesos psicológicos. Sostiene, de acuerdo con Marx, que "los cambios históricos que se producen en la sociedad y en la vida material conllevan, al mismo tiempo, otros cambios en la "naturaleza humana" (en la conciencia y conducta). Vygotski fue el primero en relacionar estas ideas con las cuestiones psicológicas específicas (Wertsch, 1991). De Engels, por ejemplo, basado en el concepto de trabajo humano y uso de herramientas, elaboró la idea de que a través de éstos el hombre cambia la naturaleza y, simultáneamente se transforma a sí mismo.

Vygotski explota de esta manera el concepto de herramienta de un modo particular basado en las ideas de Engels: la especialización de la mano significa la herramienta y ésta presupone la actividad específicamente humana, la reacción transformadora del hombre sobre la naturaleza. El animal utiliza la naturaleza exterior e introduce cambios en ella pura y simplemente con su presencia, mientras que el hombre, mediante sus cambios, la hace servir a sus fines, la domina. A juicio de Vygotski (1929), podemos transformar la naturaleza hacia el exterior y ponerla al servicio de nuestros fines únicamente de conformidad con las leyes mismas de la naturaleza.

Podemos, entonces, llegar a pensar que Vygotski concibió los procesos psicológicos superiores como una aplicación psicológicamente importante del materialismo histórico y dialéctico.[18] Un eje central de este método consistía en que todos los fenómenos debían ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio. Vygotski destacó que los procesos psicológicos superiores surgen de la actividad humana mediada por instrumentos psicológicos de carácter semiótico. Por lo tanto, el *desarrollo cognitivo parece depender del dominio progresivo de unos sistemas de mediación simbólica cada vez más complejos*.[19]

Vygotski (1931/2000, p. 34) sugiere que:

> la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo. En el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales.

El lenguaje, la escritura y las distintas formas literarias son los instrumentos culturales-psicológicos que proporcionan el mecanismo formal para el dominio de los procesos psicológicos.

Wertsch (1985/1988) plantea que para Vygotski un primer criterio que caracteriza las funciones psicológicas superiores (pero no las elementales) es su *origen y naturaleza social*. De esta forma, sugería Vygotski, no es la naturaleza, sino la sociedad la que, por encima de todo, debe ser considerada como el factor determinante del comportamiento humano. Vygotski (1931/2000, p. 151) plantea que:

[18] En Hegel (1817/2004), el término dialéctica tiene una larga historia. De él se destacan cuatro acepciones fundamentales: (1) la dialéctica como método de la división lógica, conforme a la cual se clasifica un concepto genérico en sus especies; (2) la dialéctica como lógica de lo probable; (3) la dialéctica como término para designar a la lógica entera y (4) la dialéctica como método encaminado a superar las oposiciones de dos términos (tesis-antítesis) en uno nuevo: la síntesis (p. xxxix). Hegel asimila esta última acepción, prosiguiendo y desenvolviendo ideas al respecto de Kant y Fichte.

[19] El énfasis es mío.

> Todas las funciones psíquicas superiores son relaciones interiorizadas de orden social, son el fundamento de la estructura social de la personalidad. Su composición, estructura genética y modo de acción, en una palabra, toda su naturaleza es social; incluso al convertirse en procesos psíquicos sigue siendo cuasi-social. El hombre, incluso a solas consigo mismo, conserva funciones de comunicación.

Un segundo criterio para diferenciar las funciones psicológicas superiores de las elementales es el de la *mediación.* En este sentido, sostiene Wertsch (1985/1988), la concepción vygotskiana del control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social de los procesos psicológicos superiores presuponen la existencia de herramientas psicológicas o signos, que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás. Los signos o herramientas psicológicas como medios semióticos también encuentran sostén desde una concepción antropológica aplicada al proceso educativo. Estamos de acuerdo con Herrero (1992) en señalar que es imposible concebir al ser humano fuera de las relaciones que le ponen en contacto con el otro.

La noción de mediación es analíticamente importante. De acuerdo con Vygotski, la presencia de estímulos creados, junto con estímulos dados es la característica diferencial de la psicología humana. Como lo señalan Cole & Wertsch (1996), los instrumentos o herramientas psicológicas recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano. Un corolario de esta argumentación podríamos enunciarlo de la siguiente manera: *los instrumentos o recursos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o re-significan dicha actividad y desde luego las maneras de pensar*.

La idea de *conciencia* no está al margen de esta discusión, la verdad nunca ha estado al margen. Muy al contrario, esta noción es teorizada en relación con la idea de actividad. El desarrollo de la conciencia de un niño (Leontiev, 1983, citado en Kozulin, 2000, p. 40) "se produce como resultado del desarrollo del sistema de operaciones psicológicas que, a su vez, está determinado por las relaciones genuinas entre el niño y la realidad". Al respecto, Kozulin (2000, p. 79) destaca este tipo de relaciones y la considera íntimamente ligada a la noción de trabajo:

> Hegel vincula la aparición de la conciencia y la autoconciencia del ser humano con el proceso de actividad mediada que es el trabajo. La noción filosófica de *mediación* ya sugiere toda una gama de posibles agentes mediadores. En primer lugar, el trabajo presupone unos instrumentos materiales interpuestos entre el individuo y el objeto natural. Aunque estos instrumentos están dirigidos a objetos naturales, también tienen una influencia recíproca en el individuo, modificando así su tipo de actividad y de cognición. En segundo lugar, como el trabajo siempre es un trabajo para alguien más, las características sociales y psicológicas de esa otra persona también entran en la ecuación. Por último, puesto que el trabajo es imposible sin representaciones simbólicas, estos símbolos y sus medios de transmisión pasan a ser dos agentes mediadores más.

Para Kozulin, la conciencia del sujeto está estrechamente vinculada con la interacción, no sólo con el objeto natural sino también con el otro. Esta relación compleja que construye la individualidad del sujeto a partir del otro, como en una relación de alteridad bajtiniana, influye de manera esencial en el desarrollo de la conciencia; al decir Bajtín (1979/2009, p. 360), "la conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena", lo cual sugiere que la conciencia adquiere su identidad dentro de la práctica social reflexiva. Según Radford (2013, p. 27):

> La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta en el curso de la cual tomamos sensibilidad de las formas culturales que nos permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, de nosotros mismos y de nuestro mundo.

El llamado que hacen Kozulin y Radford en el sentido de buscar los orígenes de la actividad consciente en lo externo, en el otro, en lo social, ha sido discutido también por Luria, tal y como lo reporta Wertsch (1998, p. 26):

> Para explicar las formas altamente complejas de la conciencia hay que ir más allá del organismo humano. No hay que buscar los orígenes de la actividad consciente y la conducta "categórica" en las depresiones del cerebro humano o en las profundidades del espíritu, sino en las condiciones externas de vida. Por sobre todo, esto significa que hay que buscar esos orígenes en los procesos externos de la vida social, en las formas sociales e históricas de la existencia humana.

En particular, la mediación del lenguaje, además de su importancia en el contacto social, consideramos que aporta al desarrollo cognitivo varias formas de ser: libertad operacional, independencia del contexto, complejidad de la acción (planeación), autorreflexividad (conciencia del lenguaje, conducta mediata) y control de la conducta (no a los impulsos). Anota Cárdenas (en prensa) que desde esta perspectiva, para Vygotski "[…] la característica básica de la conducta humana en general es que las personas influyen en sus relaciones con el entorno, y a través de dicho entorno modifican su conducta, sometiéndola a su control".

Podemos afirmar, entonces, que en términos educativos el desarrollo cultural es un proceso artificial. Como bien lo anota Vygotski (1987, p.187):

> "La educación es el *desarrollo artificial* del niño; [la educación] es el dominio ingenioso de los procesos naturales del desarrollo y no sólo influye sobre unos u otros procesos del desarrollo, sino que reestructura, de la manera más esencial, todas las funciones de la conducta".

Esta *línea cultural de desarrollo* vygotskiana requiere de un complejo y relativamente largo proceso de apropiación cultural. Proceso que estaría orientado a propiciar grados crecientes de dominio *autónomo* (consciente y voluntario) y *descontextualizado* de los instrumentos de mediación semiótica, lo cual posibilitaría en nuestros estudiantes, por ejemplo, formas de conceptualización cada vez más elaboradas o sofisticadas.

En términos de Wertsch (1985/1988), Vygotski concibió un principio de desarrollo que llamó *Principio de descontextualización de los instrumentos de mediación*, según el cual "el significado de los signos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto espacio-temporal en el que son utilizados" (pp. 49-50). De esta forma podemos explicar, señala Wertsch (1985/1988, p. 50), cómo "las formas de calcular observadas en los hombres primitivos eran altamente dependientes del contexto", en otras palabras, el cálculo dependía de la percepción de objetos y entornos concretos.

Esta relación, anota Wertsch (1985/1988), no anticipa la capacidad de hacer distinciones más precisas entre cantidades, sino que las distinciones se basan en juicios sobre objetos concretos, perceptivamente presentes (objetos del contexto específico donde son utilizados los signos).

El principio de descontextualización de Vygotski opera, en este caso en particular, cuando, según Wertsch (1985/1988, p. 50):

> En el cálculo, la descontextualización se halla ligada a la aparición de un sistema numérico en el que una cantidad puede ser representada independientemente de cualquier contexto perceptivo. De hecho, la cantidad puede llegar a convertirse en un objeto abstracto en sí mismo, en lugar de un significado ligado a un determinado conjunto de objetos.

Tanto el enfoque teórico propuesto por Vygotski coma la teorización que hace sobre la mediación semiótica, son retomados por Radford cuando plantea su perspectiva teórica de la objetivación. En la siguiente sección presentamos los constructos teóricos de esta perspectiva, los cuales fungen como herramientas analíticas para explicar y comprender las actuaciones matemáticas de los estudiantes en esta investigación.

2.4 La teoría de la objetivación como una aproximación histórico-cultural

La teoría de la objetivación propuesta por Radford nace como una aproximación semiótica-cultural. En sus inicios se interesaba fundamentalmente por el papel de los signos en una cultura, su funcionamiento en términos del pensamiento, más que el estudio de los signos en sí mismos, tal y como interesa a la escuela italiana (véase, por ejemplo, Arzarello, 2006), que se encuentra interesada en la evolución de los signos. En este sentido es importante para esta escuela estudiar el signo que produce el alumno y en ese proceso cómo llega hasta el signo matemático (estándar), pasando por el signo que esta escuela llama pivote como aquél que se encuentra a mitad de camino entre el signo del alumno y el signo matemático.

El problema que preocupaba a la teoría de la objetivación en sus inicios era un problema de tipo epistemológico, en tanto centraba su atención en la relación del sujeto con el saber, por lo que el aprendizaje se planteaba como un problema de toma de conciencia.

Diagrama 1. Ubicación de la Teoría cultural de la objetivación en las perspectivas socioculturales

Dentro de las aproximaciones socioculturales de la educación matemática reconocemos el posicionamiento importante que ha venido logrando la perspectiva histórico-cultural desarrollada por Vygotski. Podríamos afirmar que en los trabajos más recientes (ver, por ejemplo, Radford, 2013a), la teoría de la objetivación se enmarca en esta perspectiva histórico-cultural. No obstante, nos parece necesario y pertinente presentar brevemente algunos aspectos de la génesis de la teoría de la objetivación, pues consideramos que aún cobran vigencia y, luego, continuar con sus desarrollos más actuales. En estos desarrollos se aprecia explícitamente un giro importante hacia las ideas de Hegel. Aquí, por su parte, el problema de la conciencia aparece taxativamente como un problema mediatizado por la actividad o la praxis social. No consideramos la conciencia como entidad metafísica. Estamos hablando de conciencia desde un punto de vista dialéctico-materialista, esto es, como un caso particular de la experiencia social.

2.4.1 Breve presentación de los inicios de la teoría de la objetivación. En tanto aproximación semiótica-cultural, interesa, pues, fundamentalmente el papel que desempeñan el organismo (lo corpóreo), el discurso y los signos cuando los alumnos refieren a objetos matemáticos. Sugiere abordar el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico. Desde el punto de vista de D´Amore (2006, p. 178), "la línea de investigación antropológica parece fundamental en la comprensión del pensamiento matemático. Dicha línea de investigación debe atacar ciertos problemas, entre ellos el del uso de signos y artefactos en la cultura".

La teoría de la objetivación parte de un reposicionamiento del individuo visto como un sujeto que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la praxis social, entendida esta praxis no como una práctica contemplativa, sino como una actividad humana sensitiva y concreta (Radford, 2010a).

En esta aproximación asumimos dos principios fundamentales: *(1) los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo y (2) el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados.*[20] Estos dos principios se hacen operativos en tanto debemos

[20] El énfasis es mío.

reconocer, por ejemplo en el trabajo de aula de matemáticas, que los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, es decir, tienen una historia y necesariamente influyen en nuestras estructuras psicológicas. Como bien lo señala D´Amore (2006), el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. Estos principios nos llevan a considerar la semiótica no sólo en su papel de representación de los objetos matemáticos, pues la actividad matemática está anclada en los complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.[21]

La manera como se configura el conocimiento matemático está íntimamente definido por la cultura en la cual éste se desarrolla (Radford, 1997, p. 32). Coincidimos con Wertsch (1991, p. 35) cuando señala que "una aproximación sociocultural a la mente comienza con el supuesto de que la acción está mediada, y que no puede ser separada del medio en el que se lleva a cabo". Por lo tanto, la acción típicamente humana emplea instrumentos mediadores, tales como las herramientas o el lenguaje, y estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial.

Esta idea de acción humana encuentra, pues, su íntima relación con la cultura y el significado dentro de la cultura. En esta dirección, Bruner (2006, p. 20) sugiere que:

> En lugar de considerar la cultura como algún tipo de capa sobre la naturaleza humana determinada biológicamente, donde se presupone que las causas de la conducta humana residen en este sustrato biológico, deberíamos adoptar la perspectiva de que la cultura y la búsqueda de significado dentro de la cultura son las causas propias de la acción humana.

[21] El doctor Bruno D´Amore afirma que "si bien la semiótica nace desde un punto de vista realista, pues se piensa que los objetos ya existen, su importancia reside en la necesidad de diferenciar entre los objetos matemáticos y sus representaciones" (Declaración en el Seminario doctoral "Conceptos, objetos matemáticos y semiótica", ofrecido en el primer semestre de 2011 en el Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia).

El conocimiento (ver, por ejemplo, Radford, 2004, 2006a, 2006b), entonces, es un producto de un tipo específico de actividad humana, precisamente, de una actividad humana muy específica: el *pensamiento*. Dentro de esta perspectiva semiótica-cultural, el pensamiento es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos. Según Radford (2006b, p. 108), "El pensamiento es una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios".

Los fundamentos de la teoría de la objetivación desarrollada por Radford son dos: uno de naturaleza ontológica y otro de naturaleza epistemológica (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). En relación con el fundamento ontológico, la teoría señala que los objetos matemáticos no son independientes de la actividad realizada por los seres humanos; ni son el resultado del descubrimiento llevado a cabo por científicos interesados en conocer una realidad externa a ellos (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). Por el contrario, en la teoría de la objetivación, los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico-cultural; en específico, estos objetos "*son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos*" (Radford, 2006b, p. 111).

En el fundamento epistemológico de la teoría de la objetivación se caracteriza la manera en que los estudiantes conocen los objetos matemáticos (Radford, 2006b). Este conocimiento no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un estudiante en el momento de resolver un problema pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo (Miranda, Radford & Guzmán, 2007).

Las características de los fundamentos ontológico y epistemológico de la teoría de la objetivación sirven como base para concebir el aprendizaje de los objetos matemáticos como la "adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006b, p. 105). Este aprendizaje no es una mera imposición o transmisión de contenidos conceptuales, sino un esfuerzo por "*dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*" (Radford, 2006b, p. 113).

Es decir, los procesos de objetivación (Radford, 2009) los interpretamos como aquellos procesos sociales a través de los cuales los estudiantes capturan la lógica cultural con que los objetos de saber han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas. En otras palabras, la objetivación indica un proceso que tiene como objetivo mostrar alguna cosa (un objeto) a alguien. Pero, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Radford (2003, 2005b) los llama *medios semióticos de objetivación*, esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción.
Al decir de Radford (2003, p. 41), los medios semióticos de objetivación son:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.

Este constructo teórico nos parece fundamental dentro de la propuesta teórica formulada y desarrollada por Radford. Los medios semióticos de objetivación (Radford, 2003, 2005b, 2008a) no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Son también mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes.

Desde los puntos de vista de Radford (2008a, 2010a, 2010b) y Santi (2010), los recursos semióticos estratifican el objeto de saber (matemático) en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median. Aceptamos, por supuesto, los medios semióticos de objetivación como elementos constitutivos de la forma de pensar. Estos medios semióticos pertenecen a una diversidad de sistemas simbólicos culturales que van más allá del individuo. Por ejemplo, las formas de resolver cierta clase de problemas, las formas de argumentar, de validar, de demostrar, las maneras de decidir si una hipótesis puede servir de evidencia a un enunciado, todas ellas tienen una historia, constituyen prácticas culturales. Por lo tanto, siguiendo a Radford (2008a), afirmamos que el signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis y su pragmática) —forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en *Sistemas Semióticos de Significación Cultural*— son considerados como constitutivos del objeto conceptual: *éstos objetivan al objeto*.

Por lo tanto, los Sistemas Semióticos de Significación Cultural los entendemos como superestructuras simbólicas de significados, construidos por los propios individuos. En esta superestructura simbólica son consideradas las opiniones y las creencias de una cultura, así como las formas de generación de significados. Es en esta superestructura semiótica en la cual se afinca la imaginación intelectual (Radford, 2008a). Por ello cada sujeto es hijo de su época, de su contexto cultural, y no siempre logra romper todos los lazos que lo vinculan con el modo de pensar de su tiempo. Sin embargo, si logra romper estos lazos (avanzando en la generación de nuevo conocimiento) debemos reconocer que necesariamente paga tributo a las formas anteriores de pensar. Esta dimensión semiótica nos antecede y afecta nuestras estructuras psíquicas como, por ejemplo, la percepción y la simbolización, y, en consecuencia, las teorizaciones que hacemos acerca del mundo. Los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma (Radford, 2006b). Por lo que, al decir de Radford (2008a), la objetivación del saber, en tanto que reflexión del mundo, es un punto de encuentro entre la experiencia personal y el saber cultural.

2.4.2. Algunas consideraciones filosóficas en la teoría de la objetivación. Desde un punto de vista hegeliano -teoría del materialismo dialéctico- la idea de *pensamiento* se considera como un proceso de actividad humana. Incluso, todos los fenómenos, desde el método del materialismo dialéctico, debían ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio, de donde se desprende que el movimiento es una categoría ontológica fundamental en la epistemología hegeliana.

Afirma Davydov (1981, p. 279): “El pensamiento de un hombre es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél”. En estos términos, el pensamiento se considera un proceso objetivo de la actividad humana, un movimiento de la civilización humana y de la sociedad. Inspirado en Engels, Davydov (1981, p. 283) sugiere que:

> "la actividad laboral, experimental por su esencia, les permite a los hombres revelar las conexiones indispensables y universales de los objetos. […]La forma de universalidad –dice Engels- es la forma de perfección interna. La forma de universalidad en la naturaleza es una ley […]".

Afirma Davydov (1981) que, por ejemplo, cuando el hombre sabe que el cloro y el hidrógeno bajo la acción de la luz y a determinada temperatura y presión se unen en forma de gas y originan una explosión, él sabe también por eso mismo que ello tendrá lugar *siempre y en todas partes*.[22] Este autor señala que el saber en cuestión no depende de si el hecho se producirá una vez o se repetirá millones de veces no importa en qué cuerpos celestes. Siguiendo ideas de Engels, Davydov (1981, p. 284) plantea que en este caso se habla de "saber y del ascenso mental de lo singular a lo particular y luego a lo universal […]".

Al decir de Davydov (1981, p. 302) "los distintos sistemas simbólicos (materiales, gráficos) son medios de "patronización", y, por tanto, de idealización de los objetos materiales, medios de transferencia de los mismos al plano mental". Este autor quiere subrayar el hecho de la actividad humana en la elaboración de los conceptos y, en consecuencia, resaltar la idea de movimiento en dicha actividad, lo cual conlleva, necesariamente, la utilización de símbolos para expresar características de los objetos generales. En palabras de este autor, "hay que tener en cuenta que los símbolos expresivos de lo general en los objetos son ellos mismos formas de la actividad humana" (Davydov, 1981, p. 303).

Por eso, como lo sugiere Radford (2013a), los conceptos de saber, conocimiento y actividad son fundamentales en el andamiaje de la teoría cultural de la objetivación. En efecto, para Radford (2013a, p. 10) "saber es movimiento codificado". Es así como Hegel (1830/2009)

[22] Cursivas del original.

lo consideraba. Además, sugiere Radford (2012, p. 10) que el saber es “un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.

Si consideramos, siguiendo a Radford, el saber como movimiento, mera posibilidad, entonces de acuerdo con este autor, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. El saber como pura posibilidad puede adquirir realidad a través de la actividad concreta—la actividad que mediatiza el saber y el conocimiento. Otra manera de decir esto es que el saber es labor cristalizada. Decimos, de acuerdo con Radford (2013a, p. 12), que el saber “es una forma ideal de acción, opuesto a las acciones en sí mismas”.

Por ejemplo, el pensamiento algebraico es labor humana cristalizada, esto es, formas de acción, pensamiento y reflexión que han quedado codificadas en la cultura. El pensamiento algebraico como forma cultural codificada de pensamiento, ha sido desarrollado y refinado en el curso de la historia cultural. Éste pre-existe en una forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participen de actividades de clase.

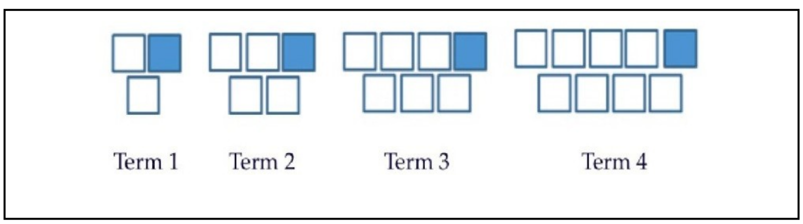


Figura 5. Secuencia figural con apoyo tabular presentada en Radford (2013a)

Según Radford (2013a), es este saber que encuentran los estudiantes en la escuela que los llevaría ver que el término 100 de la secuencia mostrada en la Figura 5, por ejemplo, tiene $1 + 2 \times 100$ cuadrados.

La Figura 6 intenta capturar la relación entre lo General, lo Particular, y lo Singular o Individual de la terna hegeliana. Lo General (el saber), como ya hemos señalado, es pura posibilidad. Lo singular (conocimiento), según Radford (2013a), es el contenido conceptual concreto que conlleva, en su materialidad, la naturaleza abstracta de lo general. Según

Maybee (2009, citado por Radford, 2013a), es el contenido de lo general, que se manifiesta en la reflexión teórica sensorial, la manera en que lo general tiene realidad. Radford (2013a) argumenta que como actividad, lo Particular es la mediación entre lo General y el Singular. Esta mediación es fundamental, ya que hace hincapié en la naturaleza mediada del conocimiento.

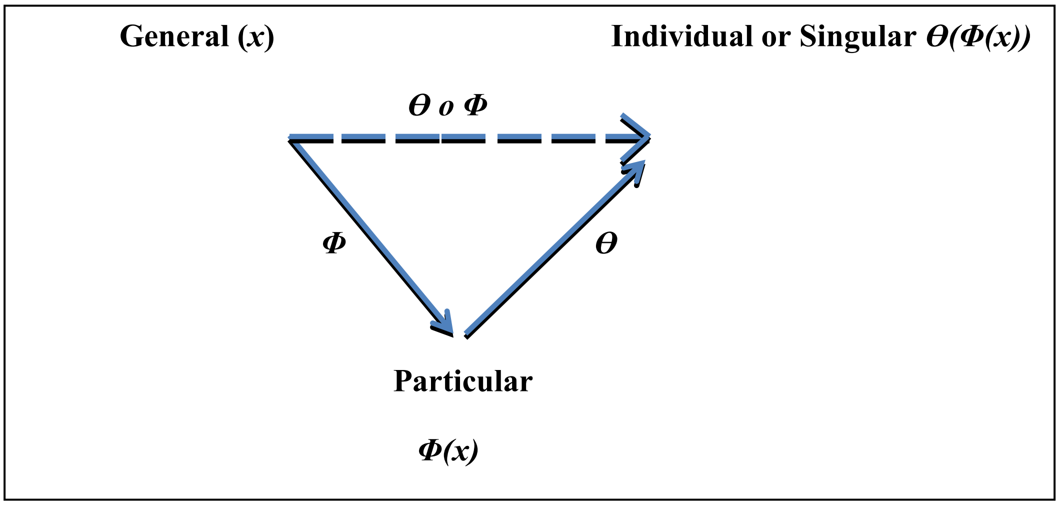


Figura 6. Lo General, el Particular y el Singular de la terna hegeliana en Radford (2013a)

En una interpretación arriesgada podemos señalar que la Figura 6 comporta el objeto cultural u objeto matemático u objeto de saber en su totalidad. En términos de Hegel (1817/2004, p. 111):

> El concepto como tal, contiene los momentos de la universalidad, libre igualdad consigo mismo en la propia determinación –de la particularidad, determinación en la cual la universalidad resta, sin ser perturbada, igual a sí misma-; y de la individualidad, como reflexión en sí de las determinaciones de la universalidad y particularidad.

Y más adelante señala (Hegel, 1817/2004, p. 112):

> Universalidad, particularidad e individualidad, tomadas abstractamente, son lo mismo que identidad, diferencia y razón de ser. Pero la universalidad es lo que

> es idéntico consigo mismo, con la expresa significación de que en lo universal está a la vez contenido lo Particular y lo Individual. Lo particular es lo que es diferente, o la determinación; pero significando que es universal en sí y está como individual. Lo individual, por último, tiene la significación de sujeto y substracto, que contiene en sí el género y la especie y es él mismo sustancial.

Según Hegel (1817/2004, p. 114):

> El juicio abstracto es la proposición: lo singular es lo universal. Éstas son las determinaciones que el sujeto y el predicado tienen primeramente el uno para el otro, siendo tomados los momentos del concepto en su inmediata determinación o primera abstracción. […] lo individual es lo universal, o más determinantemente: el sujeto es el predicado (por ejemplo, Dios es espíritu absoluto).

La individualidad es lo que Radford (2013a), en la interpretación que hace de las ideas de Hegel, llama el conocimiento o el Singular. Por eso, para este investigador, el conocimiento es la *instanciación* o *actualización* del saber (p. 16). En estos términos, sugiere que el *conocimiento* (Radford, 2013a, p. 16) debe ser comprendido como:

(1) El significado del saber como algo general
(2) El proceso de su actualización, y
(3) El resultado de su actualización

La actualización es el proceso que Hegel llama el Particular, y la instanciación es lo que según Radford (2013a), Hegel llama el Singular o Individual. Por ello, el Particular como actividad imprime su huella en la instanciación del saber, o como diría Ilyenkov (1977), el conocimiento arrastra la huella de la actividad que lo medió. De acuerdo con Radford (2013a, p. 17), "el Particular como actividad demarca la manera en la cual el conocimiento instancia el saber". En términos más simples, la manera por la cual sabemos conocer algo (por ejemplo, resolver ecuaciones) es consustancial de la especificidad de los procesos del conocimiento (Radford, 2013a).

Argumenta Radford (2013a), siguiendo ideas de Hegel (1837/2001), que el saber como posibilidad, mera *potencialidad*, "no ha emergido aún a su existencia" (Hegel, 1837/2001, p. 36). Para que pueda emerger en la existencia y pueda ser *actual*, el saber tiene que ser instanciado a través de una actualización. Plantea Noel (1995, p. 104):

> […]La unidad nueva que acaba de producirse, o el concepto (Begriff), es por el contrario la libertad esencial. Está toda entera en cada una de sus determinaciones, y su presencia es manifiesta en todas. No es nada inmediato, ni dado, sino pura acción o puro movimiento.

El saber (el concepto) es movimiento, es evolución, por ello, desde un punto de vista didáctico, los conceptos u objetos culturales se presentan a los estudiantes como posibilidades. "El saber parece ser más bien algo que no está en nosotros, algo que debemos encontrar, algo que se nos hace *objeto* (es decir, se nos opone)" (Radford, 2013a, p. 23). En esta dirección, objetivación "es precisamente el proceso de reconocer lo que se nos hace objeto - sistema de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc." (Radford, 2013a, p. 23). Noel (1995, p. 105) en su trabajo sobre "La lógica de Hegel", lo plantea en los siguientes términos:

> El concepto es ante todo lo Universal abstracto, la posibilidad indeterminada de todas las determinaciones, pero no es posibilidad pura, es decir, la simple abstracción del ser; él pone en sí mismo el momento de la particularidad, es decir, se determina.

Intentando aclarar lo dicho anteriormente, podemos afirmar que la clave está en la distinción entre lo filogenético y lo ontogenético. En efecto, desde el punto de vista filogenético, el saber tuvo que haberlo producido alguien, es decir, tiene una historia. Desde ese punto de vista, el saber es una cristalización de labores humanas –codificación, etc. Desde la mirada ontogenética, para el alumno, fenomenológicamente, al principio, el saber aparece como posibilidad solamente. La actividad de enseñanza-aprendizaje lo mira (el saber) filogenéticamente y lo posiciona como objeto de la actividad. El saber se revela al alumno, entonces, a través de la actividad de objetivación. Por lo que, por ejemplo, pensar algebraicamente es el saber, mientras que llegar a pensar es su objetivación.

La Figura 7 muestra dos relaciones, $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$. Para Radford (2013a), con respecto a la relación $\boldsymbol{\Phi}$, en el nivel más general, el Particular es la manera en la cual lo General se nos muestra. Los fenomenologistas hablan de la "manifestación" (en el sentido más fuerte de este término), es decir, del modo de presencia del Ideal (el saber) en el mundo concreto. Si lo General es una forma de pensar algebraicamente acerca de secuencias (codificadas culturalmente), entonces el Particular es la actividad que requerirían el profesor y los estudiantes para lograr algún tipo de reflexión y acción que incorpore aspectos de este pensamiento algebraico. Es decir, lo General es mera posibilidad (de naturaleza virtual) y el Particular (Radford, 2103a) es un paso hacia adelante en la concreción de lo General.

El Particular como actividad se mueve hacia su objeto a través de la identificación de objetivos. Éstos pueden ser, en la Figura 7, continuando con el ejemplo del álgebra, resolver problemas sobre secuencias algebraicas. Por lo tanto, la estructura *objeto-objetivo-tarea* se corresponde con la relación $\boldsymbol{\Phi}$ de nuestra Figura. Según Radford (2013a), la relación $\boldsymbol{\Phi}$ relata la intención pedagógica de la actividad del salón de clase. Este investigador precisa que la relación, aplicada a lo general $\boldsymbol{x}$ (es decir, pensar algebraicamente sobre las secuencias) puede tomar distintos "valores" $\boldsymbol{\Phi(x)_1, \Phi(x)_2, \ldots}$ dependiendo de la implementación de la intención pedagógica de la actividad.

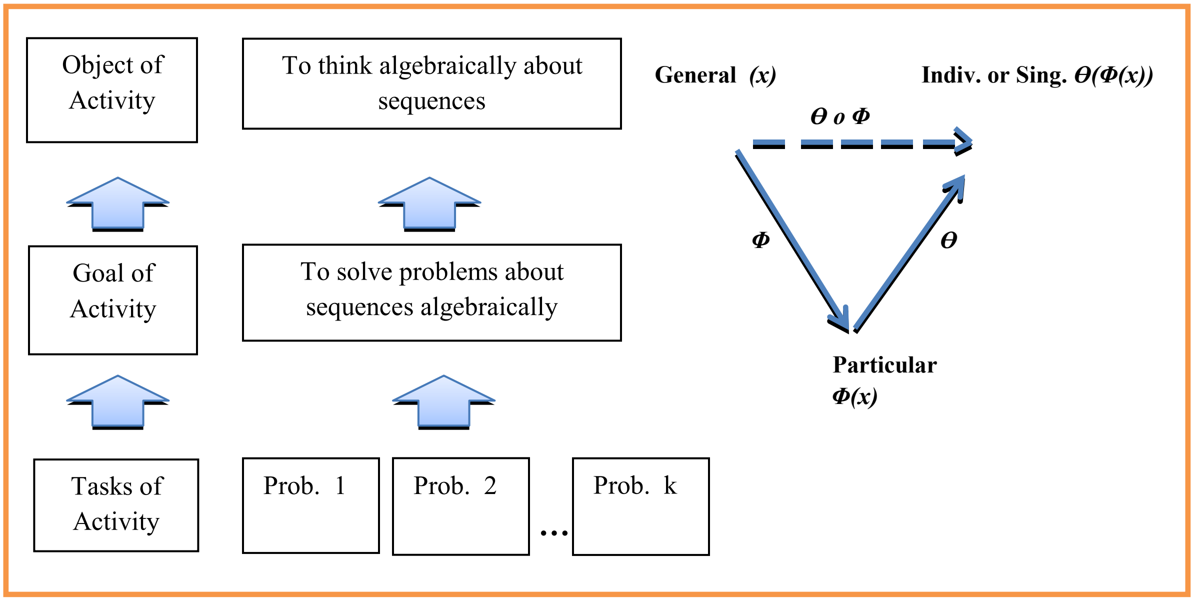


Figura 7. La estructura del Particular en Radford (2013a). El Particular como actividad particularizante se hace posible a través de las dos relaciones, Φ y Θ

Con respecto a la relación ***Θ****,* según Radford (2013a), el Particular se entiende como una actividad que *actualiza* el General en forma de una instancia individual o Singular y es lo que expresa esta relación en la Figura 7. La actividad es movimiento concreto actualizado, que lleva a una instanciación Singular del General. Dentro de la teoría la objetivación del saber, plantea Radford (2013a, p. 32):

> "La actualización del general es articulada como un proceso emergente de instanciación [del general]. El adjetivo "emergente" significa que el salón de clase es visto como un sistema que evoluciona a través de "estados" y que esta evolución no puede ser determinada de antemano. Profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico. Dependerá de cómo los estudiantes y los profesores se involucran en la actividad, de cómo ellos respondan uno al otro, etc.

Este investigador articula la relación ***Θ*** del Particular de Hegel con el trabajo en las aulas de clase de matemáticas que ha realizado en sus investigaciones. Afirma que para el caso de la teoría cultural de la objetivación, usualmente se divide el salón de clase en pequeños grupos de 2, 3 o cuatro estudiantes. Sostiene Radford que el primer estado de $\boldsymbol{\Theta}$ consiste en una presentación de la actividad por el profesor. A continuación, los estudiantes son invitados a trabajar en pequeños grupos. Conformado así el salón de clase, el profesor visita varios grupos, cuestiona y retroalimenta a los estudiantes. En un cierto momento, el profesor puede invitar la clase a una discusión general donde los grupos pueden presentar sus ideas y otros grupos pueden desafiarlos o proponer una generalización. La lección puede terminar ahí o continuar con una discusión adicional en pequeños grupos. etc.

Las relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$, que conforman la estructura del Particular de Hegel, podrían estar hablando de nuestras decisiones pedagógicas y didácticas para organizar nuestras aulas de clase. Popkewitz (2004) expone que a través de estas estructuras "empujamos" a los estudiantes a la actividad intelectual y conceptualizaciones matemáticas hacia algo establecido de antemano. En el caso aquí tratado de las tareas sobre secuencias de generalización de patrones, queremos que nuestros estudiantes lleguen a pensar algebraicamente, es decir, entren en contacto con esas formas culturales codificadas de movimiento.

De la argumentación desarrollada en nuestra sección 2.2 sobre la idea de cultura, podemos desprender que el conocimiento no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un sujeto en el momento de resolver un problema, pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura. El conocimiento es realmente el resultado de una mediación. En este sentido, el aprendizaje (Radford, 2013a, p. 25) sería "la transformación subjetiva e idiosincrática del saber *"in itself"* en un saber *"for itsel"*, esto es, una transformación de un saber cultural objetivo en un objeto de la conciencia", es decir, un proceso de objetivación.

Esta idea de conciencia, muy estrechamente vinculada con la Fenomenología, encuentra sostén en Hegel (1817/2004): la Fenomenología es la "ciencia de la experiencia de la conciencia" (p. xxxvi). Más aún, cuando Hegel (1817/2004) habla de Fenomenología, considera al espíritu en su desarrollo desde las formas que toma conciencia sensible hasta las propias de la autoconciencia de la razón" (p. LI). En este proceso complejo, *el sujeto se topa con el objeto y el primero se transforma a través de la toma de conciencia progresiva*. Según Radford, para Hegel:

> La experiencia es la transformación que sufre el sujeto a raíz de su encuentro con algo que no es él. (Comunicación personal, 22 de Octubre de 2012)

Este es el proceso que Radford llama *subjetivación*. Rancière (1999, citado por Roth & Radford, 2011, p. 129) define la subjetivación como "la producción de un cuerpo (viviente); este cuerpo se produce a través de una serie de acciones. Estas acciones son aquellas del sujeto en sí mismo, así como las acciones de los otros y el mundo natural". Como señalan Roth & Radford (2011) "Subjetivación significa el desarrollo de un sujeto-en-actividad" (p. 135), lo que nos permite inferir que los procesos de subjetivación son procesos inacabados, perpetuos, continuos.

Ser (Being) y Becoming[23] son dos procesos de subjetivación teorizados por Radford (2013a). Ahora bien, sugiere este autor, de la misma manera en que existe una relación dialéctica entre el saber y el conocimiento, existe una relación entre el ser y el becoming. En la Figura 8 queremos expresar que así como el conocimiento es la instanciación del saber, becoming es la instanciación del ser. Y de la misma manera en que el saber se corresponde con formas codificadas de movimiento, el ser se corresponde con formas codificadas de alteridad (esto es, de relaciones con otros). Defiende Radford (2013a) que de la misma forma como el saber evoluciona cultural e históricamente, así lo hace también el ser.

[23] Al parecer no existe un término en el idioma español para la traducción de Becoming. Aunque *"Llegando a ser"* o *"Volviéndose"* podrían ser buenas traducciones, decidimos seguir utilizando el término en inglés que quiere significar un proceso inacabado o perpetuo.

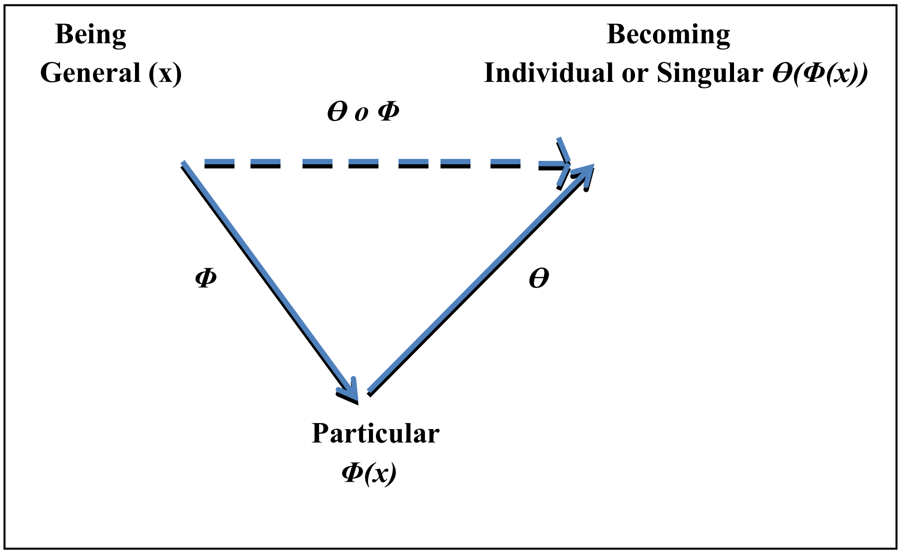


Figura 8. Conocimiento y Becoming como parte de un mismo proceso de objetivación-subjetivación

Es más, para este investigador, el aprendizaje sería a la vez conocimiento y becoming. Más específicamente, el aprendizaje ocurre en el curso de los procesos sensoriales o sensitivos o incorporando procesos de objetivación que están inmersos en procesos de subjetivación. En síntesis, para Radford (2013a), conocimiento y becoming ocurren juntos. Cuando el conocimiento y becoming no ocurren al mismo tiempo, cuando conocimiento y becoming están fuera de sincronía, sostiene este investigador, lo que tenemos es conocimiento alienado y estudiantes alienados. El producto de la actividad de los estudiantes aparece como algo extraño, como algo alejado de ellos. El saber "en sí mismo" y el ser "en sí mismo" permanecen separados de los estudiantes.

En la teoría cultural de la objetivación desarrollada por Radford, el ser se considera pura potencialidad, y es a través de la actividad (el Particular en la terminología de Hegel) que el ser es instanciado. El ser, en esta teoría, es aquel que se basa en atributos constituidos histórica y culturalmente. Vale la pena resaltar aquí que la actividad debe ser vista no como una simple cooperación entre individuos parta lograr algo, ni debe ser vista como un simple medio. La actividad debe ser considerada como una labor conjunta.

Para Radford:

> "La actividad es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objeto que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas" (comunicación personal, 3 de marzo de 2011).

El acento de la teoría de la actividad en el sentido de Leontiev es puesto aquí de manifiesto. En el marco de esta teoría, tanto el *objeto* que se busca (por ejemplo, aprender a pensar de cierta manera o aprender a demostrar) como los *medios* que se utilizan para alcanzarlo, son *culturales*. Según Roth & Radford (2011), para Leontiev existen dos dimensiones principales de la teoría de la actividad: (a) *La actividad humana tiene estructura instrumental en la satisfacción de las necesidades de los individuos,* y (b) *la actividad está implicada en las relaciones con otros seres humanos.*

Marx & Engels (1970, citados por Radford, 2000a) sugieren que las investigaciones de lo que los individuos son, hacen, piensan y sienten en cualquier período histórico deben distinguir entre dos categorías generales relacionadas entre sí. Por una parte tenemos las *relaciones de producción*, referida a las formas culturales e históricas de la interacción humana y la cooperación, esto es, la normatividad y reglamentación entre individuos. De otro lado, tenemos los *modos de producción*, dimensión tecnológica o material a través de la cual las personas producen sus medios de subsistencia y satisfacen sus necesidades.

Estamos de acuerdo con Leontiev que la a*ctividad* es un proceso social, una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana (Leontiev, 1978, 1983, citados en Radford, 2004b). Más específicamente, la actividad matemática de un sujeto es una forma de reflexión que envuelve lo individual como un todo, su conciencia, sentimientos, percepción, actividad sensoriomotora, inmersa en un sistema de significación cultural que orienta sus actos intencionales.

En lugar de asumir una función meramente de adaptación, catalizadora o facilitadora, en esta perspectiva teórica de la objetivación, consideramos la *interacción social* como *consustancial del aprendizaje* (Radford, 2006b). Este tipo de interacción social podemos analizarla desde dos conceptos teóricos (Radford & Roth, 2010): *the space of joint action* y *togethering.* The space of joint action se caracteriza como un verdadero espacio de intersubjetividad en donde "el pensamiento aparece como un fenómeno colectivo" (Radford & Roth, 2010, p. 6). Subraya el hecho de que la interacción se basa en una evolución, puesta a punto, y de intercambio de perspectivas de los participantes. Por su parte, togethering teoriza los eventos que sistemáticamente trascienden los límites del aquí y ahora. Este concepto da cuenta de "la manera ética en que los individuos se involucran, responden y ajustan el uno al otro, a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales" (Radford & Roth, 2010, p. 10).

2.4.3 El gesto como medio semiótico de objetivación y los constructos nodo semiótico y contracción semiótica. En uno de los foros de investigación del Congreso Internacional del PME-2005 (*International Group for the Psychology of Mathematics Education-2005*) se reconoce, como objetivo principal, la importancia del gesto en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. En el contexto del congreso, Arzarello & Edwards (2005) se interesaron en analizar de qué forma el gesto contribuye a la construcción de significado de conceptos matemáticos. La importancia del estudio del gesto reside en reconocer que por medio de él es posible materializar intenciones, además de ser un elemento integrante, no periférico, en las maneras de pensar de los estudiantes.

En particular, el gesto, como un medio semiótico de objetivación, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en su proceso de conceptualización. Por ejemplo, en la caracterización de gesto en el sentido otorgado por Kendon (1987), se hace corresponder este término con la idea de gesticulación, "los gestos que ocurren en asociación con el discurso y que parecen estar estrechamente relacionados con éste, como parte de la elocución, se denominan gesticulaciones" (Kendon, 1987, p. 75). Así, gesto y gesticulación son utilizados en este trabajo como sinónimos.

Vygotski (1978), en sus investigaciones relacionadas con el desarrollo de la percepción, detectó que niños de dos años de edad pudieron describir y reproducir las relaciones espaciales entre objetos ubicados en pinturas con el empleo exclusivo del lenguaje gestual (gesto). Cuando a los niños se les permitió el uso del lenguaje verbal (habla), Vygotsky reconoció que las palabras eran acompañadas de gestos que permitieron a los niños superar las dificultades ocasionadas por la comunicación verbal (Vygotsky, 1978, p. 32).

Por ejemplo, en concordancia con la observación de Vygotsky (1978), Kendon (1987, p. 83) establece que "el gesto, con frecuencia, es utilizado cuando las circunstancias en las que sucede la comunicación hacen difícil o imposible que las palabras verbales sean recibidas". De este modo, el gesto se convierte en una forma de comunicación tan importante como el habla.

Sin embargo, la importancia del gesto no sólo radica en su capacidad de superar las dificultades que se presentan en la comunicación verbal. Kendon (1980, citador por Miranda, 2009) señala que el gesto es importante debido a que no depende de la oración verbal; es capaz de comunicar ideas o representaciones mentales imposibles de comunicar con el habla. Kendon reconoce que el gesto, en el proceso elocutivo, es una manifestación diferente de la verbal. Dicho proceso puede caracterizarse como si "tuviera dos canales de salida dentro del comportamiento [humano]: uno a través del habla; el otro por medio del movimiento corporal [gesto]" (Kendon, 1980, p. 218).

La autonomía del gesto es reconocida, también, por McNeill (1985), quien asegura que, aun cuando el gesto y el habla están relacionados entre sí, los significados que cada uno tiene en la elocución son independientes uno del otro. Así, el emisor crea gestos para significar cosas distintas (o similares) de las que puede significar con su oración verbal (McNeill, 1985). Para Edwards (2005, p. 137), "los gestos forman parte de la solución de un problema matemático; no se restringen a ser "simples ilustraciones" de los objetos referidos en las explicaciones verbales".

El carácter mediador de los gestos en los procesos de resolución de problemas, es destacado por Radford (2005b, p. 143) cuando sostiene que:

> "Los gestos son parte de esos medios que permiten, a los estudiantes, objetivar el saber –es decir, les permiten darse cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto.

En los procesos de objetivación del saber, este investigador visibiliza en el papel de los gestos las intenciones de comunicación de algún aspecto de los objetos culturales, por ejemplo secuencias de patrones. Para Radford (2005b, p. 143):

> Ellos [los gestos] son elementos indispensables en el *proceso de objetivación* del saber de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

Según Miranda (2009), no obstante el importante papel del gesto en la adquisición del saber matemático, Radford (2005b) puntualiza que el gesto no es suficiente para dar cuenta de la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Este investigador propone que el análisis del proceso de aprendizaje debe tomar en cuenta la relación del gesto con otros sistemas semióticos. Así mismo sugiere profundizar en la idea vygotskiana de la mente como una unidad de elementos materiales e ideacionales y destaca, en esta idea, que el enriquecimiento del uno implica el enriquecimiento del otro, en una especie de relación dialéctica.

De acuerdo con Alibali, Kita & Young (2000, citados por Radford, Edwards & Arzarello, 2009) "el gesto juega un rol en la producción discursiva porque juega un papel en el proceso de conceptualización. […] El gesto está involucrado en la planeación conceptual de los mensajes y ayuda a los sujetos a "empaquetar" información especial dentro unidades verbalizables" (p. 93). Siguiendo a McNeill (1985), Radford (2009, p. 113) plantea que "los gestos son una especie de ventana para acceder al pensamiento", idea que intenta visibilizar los trabajos pioneros de Vygotski (1978, p. 107) sobre la relación entre gestos y signos:

> A gesture is specifically the initial visual sign in which the future writing of the child is contained as the future oak is contained in the seed. […] The gesture is a writing in the air and the written sign is very frequently simply a fixed gesture.

Según Radford (2002), hay una variedad de recursos semióticos movilizados por los estudiantes y los profesores, como gestos, miradas, dibujos y modos extra-lingüísticos de expresión, que no cumplen los requisitos de las definiciones clásicas de los sistemas semióticos como se explica en literatura (por ejemplo, Duval, 1995/1999). Un aspecto importante que merece destacarse, por ahora, es que la forma en que tales sistemas semióticos diferentes se activan es *multimodal* (Arzarello, 2006).[24]

En este proceso, es necesario destacar que la elección de los signos no es neutra ni independiente, pues dicha elección determina el destino en el cual se expresa el pensamiento, es decir, el destino de la comunicación. En particular, el lenguaje algebraico impone una sobriedad a quien piensa y se expresa, en otras palabras, impone una sobriedad y economía en las formas de significación, hecho que fue impensable antes del Renacimiento.

Radford (2008b, 2010a, 2010b, 2010c) señala que los estudiantes tienen que compensar la reducción de recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos o palabras, dicha sobriedad y economía es lo que en la teoría de la objetivación se llama *contracción semiótica.* En este proceso de objetivación, en general, los gestos y el ritmo, por ejemplo, son excluidos y los estudiantes tienen que trabajar aquí

[24] La idea de multimodalidad será expuesta y desarrollada en el Capítulo 4 sobre el desarrollo de la investigación.

con formas reducidas de expresión. Este trabajo con formas simplificadas de expresión hace pensar en la contracción semiótica como un proceso de reorganización psíquica en el sujeto, lo cual lo lleva paulatinamente, pero no de manera homogénea, a una toma de conciencia del objeto cultural, en este caso una forma de pensar históricamente constituida y que ha quedado codificada en la cultura.

Radford (2012a) señala que en este proceso de objetivación se evidencia una evolución de la unidad de componentes materiales-ideacionales del pensamiento algebraico. La contracción semiótica, enfatiza Radford (2012a, p. 686):

> Es un proceso genético en el curso del cual se toman decisiones entre lo que se considera relevante e irrelevante, que conduce a una contracción de la actividad semiótica anterior, lo que resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos. Implica un nivel más profundo de la conciencia y la inteligibilidad del problema en cuestión y es un síntoma de aprendizaje y de desarrollo conceptual.

Por otra parte, la movilización de los medios semióticos de objetivación podría darse en un mismo momento, es decir, de manera sincronizada. La idea de *nodo semiótico* (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003) es un intento de teorizar la interacción de sistemas semióticos en la objetivación del saber. Un nodo semiótico (Radford, 2000, p. 121) “es una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber”.

Con la idea de nodo semiótico queremos revelar cómo los signos y los artefactos son usados por un sujeto en sus procesos de objetivación del saber o, más específicamente, nos interesa comprender y explicar el papel que juega el recurso a los signos y las formas de significación en la toma de conciencia de los objetos culturales. De acuerdo con Radford (2008b), la contracción semiótica se puede entender como la evolución de los nodos semióticos, en tanto la sobriedad en el pensamiento está ligada a la manera como los recursos semióticos van evolucionando de fórmulas corpóreas hacia fórmulas más sofisticadas.

2.4.4 Sobre el pensamiento algebraico. Coincidimos con Radford (2010b) cuando reconoce que los objetos matemáticos son objetos «generales», y la actividad matemática es esencialmente simbólica. Este investigador plantea, además, la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación dialéctica entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización.

Según Radford (2011, p. 318), lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades *indeterminadas* de una manera *analítica*. En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (e.g., incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos. Argumenta, a partir de los trabajos de Viète (1591/1983) y Descartes (1637/1954), que en este tipo de pensamiento no hay diferenciación entre números conocidos y desconocidos. Esta es la razón por la cual Viète y otros matemáticos en el siglo XVI (Radford, 2010b) se refiere al álgebra como un arte analítico. Se infiere, entonces, que la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede darse en términos de notaciones, como a menudo se piensa. Sostiene que el simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente, por lo que podemos afirmar que “el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno” (Radford, 2012a, p. 677). Este autor argumenta que los matemáticos chinos antiguos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones. Así mismo, Radford relata que escribas babilonios utilizaron diagramas geométricos para pensar algebraicamente.

Es decir, no es ni necesaria ni una condición suficiente el uso de letras en álgebra para pensar algebraicamente. Como lo sostiene Radford (2012a, p. 677), “nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo”. No obstante, el objetar la idea que las notaciones son una manifestación del pensamiento algebraico abre posibilidades o nuevas vías para la investigación de las formas elementales de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes.

Es importante señalar que el surgimiento del simbolismo algebraico fue una manera de reflexionar acerca del mundo, una manera que fue pensable en el contexto de un mundo en el que máquinas y nuevas formas sociales de distribución del trabajo transformaron radicalmente la experiencia humana. Al decir de Serfati (1999), la gran ventaja del simbolismo de Bombelli y Viète reside en que éste hace posible ´un fuerte automatismo en los cálculos´, de ahí que el concepto de eficiencia en los cálculos algebraicos tiene razón de ser como un concepto cultural. Es decir, se manipulan los símbolos como manipular productos manufacturados, en tanto no es necesario saber cuáles son los objetos o qué representan, lo que interesa, en este caso, es operar con ellos, manipularlos.

En esta investigación asumimos el *pensamiento algebraico* como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Desde nuestras consideraciones filosóficas podemos aseverar que el pensamiento algebraico, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con Radford (2010b), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores) estrechamente relacionados:

- El sentido de *indeterminancia* (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La *analiticidad,* como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Radford (2011) plantea que la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o *regla* que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño. Es una regla ejemplificada en casos particulares (p. e., 12 más 12, más 1), donde los números son tratados no como meros números sino como constituyentes de algo más general. Es más, el sentido de la indeterminancia, plantea Radford (2010b), refiere a una *sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros*.[25] Esta indeterminación hace posible, por ejemplo, la sustitución de un objeto variable o desconocido por otro, sin embargo, señala Radford (2010b), no tiene sentido sustituir 3 por 3.

En este sentido, desde esta caracterización, el pensamiento algebraico abre nuevas posibilidades para repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden ser significadas por los estudiantes jóvenes. A juicio de Radford (2012a), es aquí donde entra en escena la semiótica, en tanto ésta se interesa, como lo señala Eco (1988), por la comprensión de la manera en que las personas significan (y comunican). Radford (2010b) insiste en que estos signos pueden ser letras, pero no necesariamente, pues el uso de letras no equivale a hacer álgebra.

Radford (2010a) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural. Postulamos que la contracción semiótica, como proceso de objetivación, se desarrolla cuando se pasa de un estrato a otro. La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres vectores o componentes analíticos que lo caracterizan. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes:

1) *Pensamiento algebraico Factual.* Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más 2".

[25] El énfasis es mío.

2) *Pensamiento algebraico Contextual.* Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice *"arriba quito uno"* o *"dos por la figura más uno"*, o *"# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total"*. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.
3) *Pensamiento algebraico Simbólico.* Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n-1$. Según Radford (2010a, p. 8), en este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica.

2.4.5 Sobre la generalización algebraica de patrones. Según Radford (1997), *generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010b), pues, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se erigen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Esto sugiere poner atención en los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela. De acuerdo con Radford (2008b, 2013b), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$).

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots)$, y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[26] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

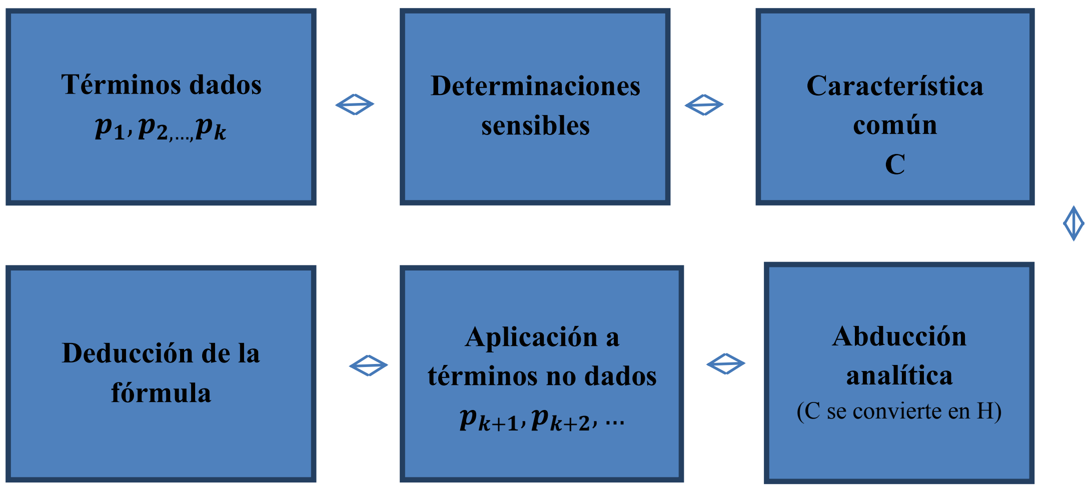


Figura 9. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales presentada en Radford (2013b)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de la cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010b). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013b), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. “La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible” (Radford, 2013b, p. 6).

[26] Énfasis en el original.

Plantea este autor (Radford, 2013b, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere [...] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*.[27] Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

De acuerdo con la definición de generalización algebraica de patrones, podemos hablar también de generalizaciones Factuales y Contextuales. Un generalización de tipo Factual es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual (Radford, 2003) como medios semióticos de objetivación. Lo general o lo indeterminado en este estrato de generalización quedan sin nombrar. Las generalizaciones Contextuales, por su parte, suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas; en este caso "se generalizan no sólo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones" (Radford, 2003, p. 65). Estas generalizaciones "van más allá del dominio de las figuras específicas o particulares y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (Radford, 2003, p. 65).

Como lo plantea Radford (2010b), es posible encontrar casos de producciones matemáticas en estudiantes que no presentan las características de nuestra definición de la generalización algebraica de patrones. Radford sugiere que estos estudiantes aún no han entrado en el reino del álgebra, en tanto pueden estar trabajando en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo. Si bien lo generalizado puede ser una comunidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para

[27] Énfasis en el original.

proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. En este sentido, señala Radford (2010b), estamos frente a una *generalización aritmética*.

También es posible identificar algunos esfuerzos por parte de los estudiantes cuando intentan describir una expresión general para calcular el número de círculos (cuadrados) correspondiente a cualquier término de una secuencia dada. Plantea Radford (2008b) que en este esfuerzo algunos estudiantes pueden realizar procesos de abducción que parecen más meras adivinanzas, las cuales no conducen a la regla que genera todos los términos de la secuencia, pues ninguna de estas adivinanzas es el resultado de la inferencia de la comunalidad acerca de los primeros (tres o cuatro) términos de la secuencia. En este caso, dice Radford (2013b), los alumnos producen una fórmula (inclusive usando signos alfanuméricos del álgebra) pero tal fórmula no es deducida; "de hecho, la abducción concierne la fórmula misma" (Radford, 2013b, p. 7). Esta regla, obtenida por inducción, lleva consigo un procedimiento basado en el razonamiento probable (o plausible), cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas. Éste es un tipo de inducción que Radford (2008b) llama *inducción ingenua*. El adjetivo (ingenua) quiere enfatizar la distinción con otros tipos más sofisticados de inducción.

Capítulo 3
Diseño de la Investigación

3.1 Introducción

En este capítulo informamos acerca de la manera como diseñamos nuestra investigación. El estudio lo enmarcamos en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991). La investigación en este enfoque construye una rica descripción del fenómeno o problema didáctico bajo estudio, en este caso, la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos jóvenes (9-10 años). Es decir, estamos interesados en el significado y la interpretación que hacen nuestros estudiantes cuando abordan las tareas sobre generalización de patrones que proponemos, al mismo tiempo que hacemos énfasis sobre la importancia del contexto y los procesos que desarrollan.

La opción de abordar en esta investigación secuencias figurales y numéricas lineales reside fundamentalmente en que estos tipos de secuencias representan situaciones propicias para la emergencia de formas de pensamiento algebraico (Radford, 2010a, 2010b, 2010c, 2012a). Esta razón es también apoyada por las sugerencias investigativas que plantea el profesor Luis Radford, expuestas en el apartado 1.1 del planteamiento del problema de investigación.

Desde la perspectiva de Goetz & Lecompte (1988) capitalizamos el proceso de fiabilidad, al mejorar el proceso investigativo proporcionando información suficiente en relación con: tareas sobre generalización de patrones en las que se desarrolla la experiencia; la selección de la población (estudiantes de 4° y 5° de primaria de un colegio privado de Bogotá, Colombia); los métodos de recolección de datos y el análisis de los mismos; la posibilidad de revisión del trabajo por otros investigadores.

La validez, por su parte, se fortalece al realizar una permanente comparación de los datos y una descripción lo más profunda y detallada posible del análisis realizado. De acuerdo con Soneira (2006), es necesario hacer máxima la explicación y comprensión de un fenómeno con el mínimo de conceptos y formulaciones. Esta idea o criterio de parsimonia (Soneira, 2006, p. 157) es fundamental en el proceso de comparación de los datos a través de similitudes y diferencias, por ejemplo, con los estratos de pensamiento algebraico Factual y Contextual.

Dado que en nuestra aproximación vygotskiana asumimos la tesis según la cual el pensamiento se puede desarrollar en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) a través de la interacción verbal de maestros y alumnos y de los alumnos entre sí, planteamos como recurso didáctico una serie de tareas las cuales ponen unas condiciones con el propósito de que ocurra cierto fenómeno. Para el caso de esta investigación, que los estudiantes nombren o nominen la indeterminación o, más generalmente, movilicen otras formas de pensamiento relacionadas con la generalización de patrones. Esta dimensión corresponde a la relación Φ dentro de la estructura del Particular hegeliano que adoptamos en nuestro marco teórico. Por eso entendemos que la teleología del significado no sólo reposa en las tareas diseñadas sino también en la actividad tal cual como se desarrolla (evento) y en la organización didáctica de esa actividad. Esta dimensión corresponde a la relación Θ en la estructura del Particular. Por supuesto, indagar por la manera como los estudiantes modifican sus formas de pensamiento algebraico, debe considerar las dos relaciones Φ y Θ dentro de la estructura del Particular hegeliano.

A continuación presentamos, en la primera sección, un análisis de las tareas que propusimos en la fase de pilotaje, lo que nos arrojó elementos para ganar en sensibilidad analítica y tomar algunas decisiones en relación con el diseño de tareas subsiguientes. En la segunda sección de este capítulo damos cuenta de este diseño y de su justificación teórica. La población, la naturaleza de las sesiones de trabajo y el proceso llevado a cabo de recolección de la información se expone en la tercera sección.

En la última parte de este capítulo informamos sobre la constitución de los datos y la descripción del análisis de los mismos. Visibilizamos el proceso de codificación abierta desde los planteamientos de Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006), precedido por el criterio de foco teórico al tener en consideración de manera permanente nuestra pregunta y objetivo de investigación.

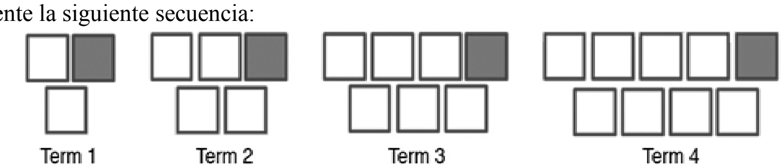
3.2 Fase de pilotaje

El pilotaje lo llevamos a cabo en el mes de noviembre de 2010. El grupo con el cual trabajamos estuvo conformado por doce estudiantes, de edades comprendidas entre los 9 y 10 años, de un colegio privado de la ciudad de Bogotá (Colombia), quien prestó su colaboración para realizar la actividad. Las tareas propuestas intentaban involucrar a los estudiantes en una actividad que posibilitara la discusión en pequeños grupos, conocer más de cerca el proceso o los procesos a través del(os) cual(es) los estudiantes ganaban confianza en el trabajo que desplegaban; nos interesaba detectar la emergencia de algunos medios semióticos de objetivación, depurar las preguntas que planteábamos y prever ciertas dificultades asociadas con la configuración de las secuencias.

Las tareas, planteadas a los grupos de estudiantes (dos por grupo), tomadas y ajustadas de las investigaciones que ha adelantado el profesor Luis Radford, se distribuyeron, la primera a tres grupos y la segunda a los restantes tres. En la primera parte de ambas tareas presentamos una secuencia figural apoyada por representación tabular (lo que Radford (2008b) llama secuencia figural) y luego, en la segunda parte, presentamos la misma secuencia pero numérica apoyada por representación tabular (Radford (2008b) la denomina secuencia numérica). La primera tarea planteaba la sucesión $(2n+1)_{n=1,2,\dots}$ y la segunda, la sucesión $(2n+4)_{n=1,2,\dots}$

Nombre: ____
Edad: _____________________
Curso: ____________________
Fecha: ___________________

Observa detenidamente la siguiente secuencia:



Siguiendo la secuencia,

(a) Dibuja la figura correspondiente al término 5
(b) Dibuja la figura correspondiente al término 6
(c) Calcula el número de cuadros de la figura correspondiente al término 9
(d) Calcula el número de cuadrados de la figura del término 100
(e) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

Ahora tienes la siguiente secuencia de números, en donde el número 3 ocupa la posición 1, el número 5 la posición 2, el 7 ocupa la posición 3, el 9 la posición 4, y así sucesivamente:

3	***5***	***7***	***9***
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4

Responde:

(a) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 5?, ¿cuál ocupa la posición 6?
(b) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 9?
(c) ¿Qué número ocupará la posición 100?
(d) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior

La respuesta de un grupo de estudiantes (Figura 10) a los ítems (a) y (b) evidencia que logra capturar el patrón, lo cual le permite dibujar las figuras correspondientes a los términos 5 y 6.

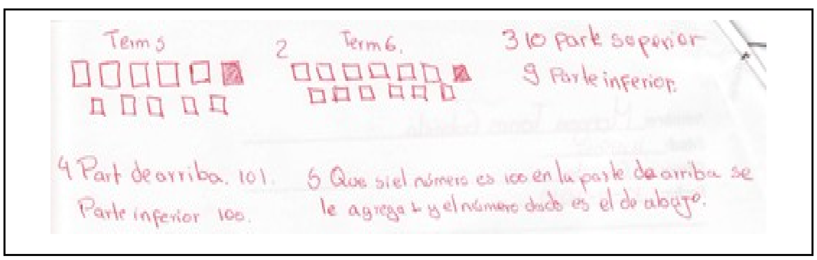


Figura 10. Respuesta de un grupo de estudiantes a los ítems de la primera parte de la primera tarea propuesta en el pilotaje

El recurso del cuadro sombreado propuesto en la secuencia figural apoyada por representación tabular le permite más fácilmente contar los cuadros de arriba y los de abajo (que corresponde al mismo número). En relación con el ítem (c), *"calcula el número de cuadros de la figura correspondiente al término 9"*, este grupo responde *"10 en la parte superior 9 en la parte inferior"* y sobre el ítem (d), responde *"Parte de arriba 101. Parte* *inferior 100"*. El ítem (e) exigía explicar la manera como se procedió para encontrar la respuesta al ítem anterior.

En relación con el ítem (e), una respuesta como *"que si el número es 100 en la parte de arriba se le agrega 1 y el número dado es el de abajo",* pone en evidencia la movilización de deícticos espaciales y la identificación de la comunalidad pues el grupo establece la relación entre las figuras mirando inicialmente la relación entre el número de cuadros de la fila superior y el número de cuadros de la inferior. Los elementos geométrico-espaciales que ofrecen este tipo de secuencias y que les permite a los estudiantes "operar" y movilizar recursos semióticos (gestos como señalamientos y palabras) nos hace pensar que son buenas candidatas para proponer en el trabajo de campo.

En relación con la segunda parte de esta tarea, los estudiantes ya no cuentan con el recurso geométrico que había sido de alguna manera útil con la secuencia de la primera parte.

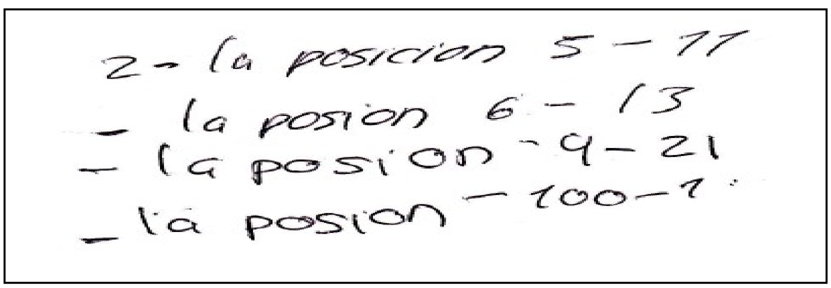
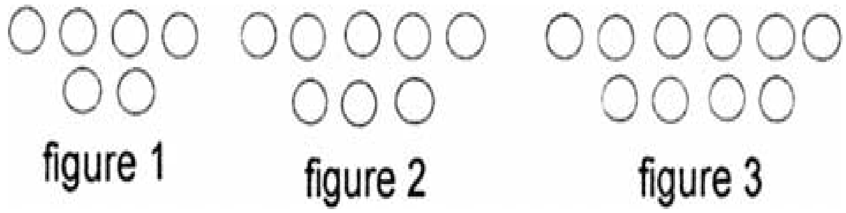


Figura 11. Respuesta de un grupo de estudiantes a los ítems de la segunda parte de la primera tarea propuesta en el pilotaje

Los estudiantes, por lo general, realizan un proceso de conteo, fortalecido con el establecimiento de una función que relaciona el número de la posición con el número correspondiente. Aquí los estudiantes identifican rápidamente la comunalidad a partir de las relaciones entre los números, y se afincan en este contexto (numérico) para establecer estas relaciones, por ejemplo, reconocen el aumento de 2 de número a número.

Nombre: ____
Edad: _____________________
Curso: _____________________
Fecha: _____________________

Observa detenidamente la siguiente secuencia de óvalos:



Siguiendo la secuencia,

(a) Dibuja el número de óvalos correspondiente a la figura 4
(b) Dibuja el número de óvalos correspondiente a la figura 5
(c) Calcula el número de óvalos correspondiente a la figura 9
(d) Calcula el número de óvalos correspondiente a la figura 100
(e) Explica la forma como procediste para encontrar la repuesta de la pregunta anterior

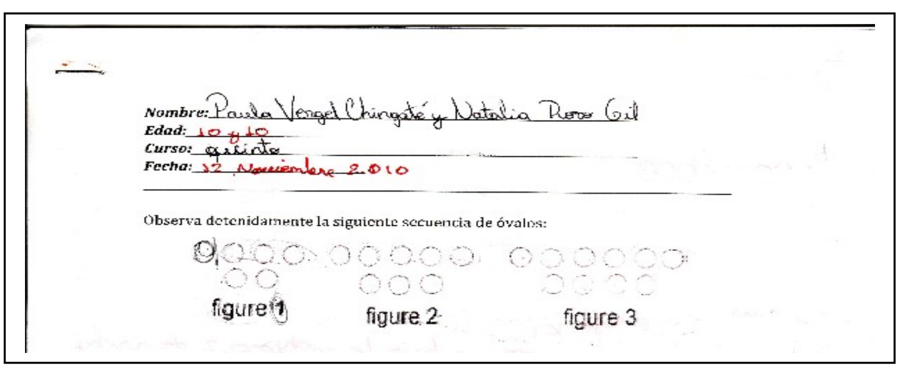
Observa la siguiente secuencia de números de acuerdo con su posición:

6	***8***	***10***
Posición 1	Posición 2	Posición 3

Responde:

(a) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 4?, ¿cuál ocupa la posición 5?
(b) ¿Cuál es el número que ocupa la posición 9?
(c) ¿Qué número ocupará la posición 100?
(d) Explica la forma como procediste para encontrar la respuesta a la pregunta anterior

El abordaje de los estudiantes de la segunda tarea (con la sucesión $(2n+4)_{n=1,2,\ldots}$), permite evidenciar la movilización de un medio semiótico de objetivación como lo es la inscripción, mostrado por el encerramiento de los tres círculos de arriba de la Figura 12.


Nombre: Paula Vergel Chingaté y Natalia Rorer Gil
Edad: 10 y 10
Curso: quinto
Fecha: 12 Noviembre 2.010

Observa detenidamente la siguiente secuencia de óvalos:

figure 1 figure 2 figure 3

Figura 12. Movilización del gesto inscripción de un grupo de estudiantes encerrando tres círculos de la figura 1

En términos de Radford (2008, 2013a), el medio semiótico inscripción nos da un indicio de que los estudiantes están instanciando una forma de pensamiento algebraico Factual. En este caso, la indeterminancia queda implícita y no alcanza el nivel de la enunciación.

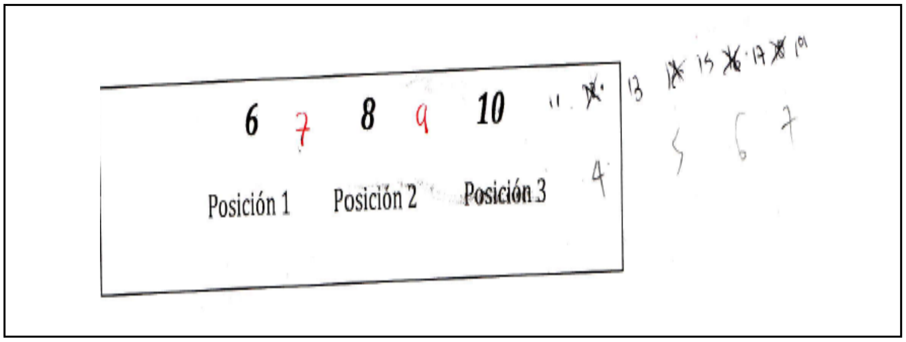


Figura 13. Acción de tachar que permite a un grupo de estudiantes responder a los ítems (a), (b) y (c) de la segunda parte de la segunda Tarea del pilotaje

La acción de tachar en la Figura 13 les permite a los estudiantes establecer una relación entre la posición y el número que ocupa dicha posición. De esta manera afirman (ver Figura 14) que se deben poner los números de 2 en 2 hasta 100; la cual se constituye en la forma de responder al ítem (d).

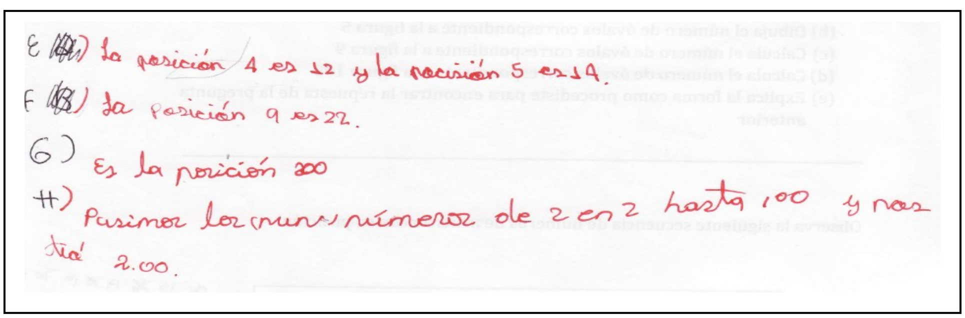


Figura 14. Respuesta de algunos estudiantes a los items de la segunda parte de la segunda Tarea del pilotaje

La aplicación de las tareas precedentes nos permite corroborar las hipótesis que nos habíamos formulado relacionadas con la emergencia de medios semióticos de objetivación al el momento de abordarlas. La movilización de estos recursos semióticos se hace importante en el contexto de la investigación y nos autoriza para tomar decisiones respecto del tipo de tareas a proponer. Reconocemos que es pertinente en nuestro trabajo de campo propiciar espacios tanto para el trabajo individual como en pequeños grupos. En el primer caso posibilitamos que los estudiantes, individualmente, hagan sus interpretaciones y produzcan propuestas de solución que luego serán confrontadas con las de los demás compañeros. Las diversas socializaciones se hacen necesarias a la luz de nuestro marco teórico. En términos bajtinianos (Bajtín, 1929/1992), el sujeto se desarrolla a partir de la presencia del otro compañero, de sus discursos y quizás de las maneras como ese otro inquiere los pronunciamientos del primero.

Dado que nuestro objetivo de investigación compromete las secuencias de generalización de patrones en cuatro contextos (secuencias figurales apoyadas por representación tabular, numéricas apoyadas por representación tabular, puramente numérica y puramente figural), ello nos motiva a proponer tareas en las cuales este tipo de secuencias tenga lugar. El interés es identificar y analizar, en cada caso, los recursos semióticos que movilizan los estudiantes en sus procesos de objetivación.

No obstante, debemos señalar que durante la investigación emergen dos tareas, la 4 (Problema del Mensaje) y la 7 (Problema del Mensaje al revés). Estas inicialmente no las habíamos considerado y resultaron importantes en términos de responder a nuestra pregunta de investigación. Declaramos que las dos tareas surgen a partir de las discusiones llevadas a cabo con el profesor Luis Radford. El Problema del Mensaje posibilitó que los estudiantes finalmente nombraran la indeterminancia de manera analítica y que la volvieran objeto de discurso. Por su parte, el Problema del Mensaje al revés favoreció el trabajo de usar la indeterminancia para producir los primeros cinco términos de una secuencia. En este problema, dado un mensaje (adaptado de uno de los mensajes producidos por los estudiantes en el Problema del Mensaje) en el cual la indeterminancia algebraica estaba explícitamente dada, los estudiantes debían identificarla y usarla.

3. 3 Diseño y justificación de las tareas

En términos generales, el diseño de tareas y la actividad propiamente como se desplegó corresponden a nuestra relaciones Φ y Θ, respectivamente, de la estructura del Particular hegeliano. Desde luego la fase de pilotaje y su respectivo análisis aportan su grano de arena para orientar el trabajo de campo. Nos interesaba en algunas tareas propuestas (por ejemplo, en las Tareas 1, 2 y 3) que los estudiantes lograran dibujar (o encontrar) los términos o figuras 5 y 6, pues estas acciones nos daba indicios para afirmar que habían capturado la comunalidad. Coincidimos con Goldin (1998, p. 57) en señalar que “la estructura de las tareas es un componente esencial para entender y hacer inferencias del comportamiento observado en la resolución de problemas”.

NOMBRE: ____

Edad: _______________ ***Curso:*** _______________ ***Fecha:*** _______________

Paula Alejandra presenta la siguiente secuencia

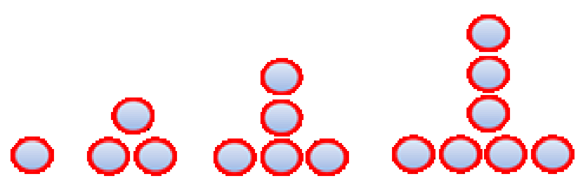


Fig ***1*** ***2*** ***3*** ***4***

1. Extiende la secuencia hasta la Figura 6

¿Cuántos círculos hay en la Figura 5? Respuesta:

¿Cuántos círculos hay en la Figura 6? Respuesta:

2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica
3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. ¿Existe alguna Figura que tenga un número par de círculos? Explica
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos en la Figura 500.

Figura 15. Tarea 1: Secuencia figural apoyada por representación tabular (1)

NOMBRE: ____

Edad: _____________ ***Curso:*** _____________ ***Fecha:*** ____________

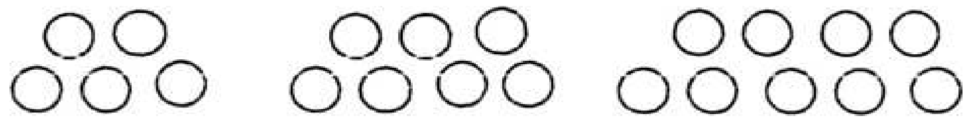


fig. 1 fig.2 fig. 3

Siguiendo la secuencia anterior,

1. Dibuja las figuras 5 y 6
2. Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces.
3. Calcula el número de círculos de la figura 100 y explica cómo lo haces.
4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 81círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. ¿Existe alguna figura que tenga 200 círculos? Explica a un compañero tu respuesta
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

Figura 16. Tarea 2: Secuencia figural apoyada por representación tabular (2)

NOMBRE: ____

Edad: _____________ ***Curso:*** _____________ ***Fecha:*** ____________

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

Siguiendo la secuencia anterior,

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Explica
2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.
3. ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta
4. ¿A qué Término corresponde el número 803? Explícale a un compañero(a) con todos los detalles la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. Un niño piensa en el número 903. ¿Pertenece este número a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Figura 17. Tarea 3: Secuencia numérica apoyada por representación tabular

Si bien reconocemos que a partir de estas preguntas o solicitudes había posibilidades de expresión por parte de los niños y las niñas, también entendimos que había limitaciones y, en consecuencia, los medios semióticos de objetivación que lograron movilizar estaban tal vez instanciando y estratificando un tipo de pensamiento en particular como el Factual.

Es necesario y pertinente señalar dos aspectos. Por un lado, fue necesario diseñar e implementar una segunda tarea (Tarea 2) sobre secuencia figural con apoyo tabular. Tal decisión fue motivada teóricamente, en tanto desde la teoría cultural de la objetivación reconocemos la necesidad de que nuestros estudiantes tuvieran una mayor familiaridad con este tipo de secuencias, lograran entrar en contacto cultural con este tipo de configuraciones y terminología, al mismo tiempo que ganaran cierta confianza en el trabajo entre ellos y con la profesora en una especie de labor conjunta (Radford, 2013a), así como poder instaurar un ambiente propicio para el trabajo tanto individual como en pequeños grupos, tal y como fue reconocido en nuestra fase de pilotaje.

Solicitudes o preguntas tales como "*Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla",* (ítem 3, Tarea 1), *"Calcula el número de círculos de la figura 100 y explica cómo lo haces"* (ítem 3, Tarea 2), *"¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta"* (ítem 3, Tarea 3), pretendían indagar por las maneras en que los estudiantes podían comunicar un mensaje a otro compañero y, en la discusión entre pequeños grupos y con la profesora, evidenciar la movilización de recursos semióticos. El esfuerzo conjunto con los compañeros y la profesora deseaba conducirlos a una instanciación de la forma codificada de pensamiento (Radford, 2013a).

Nos proponíamos lograr que el saber cultural "en sí mismo" se transformara en saber "para sí mismo", esto es, transformado en un saber para quien intentaba comunicar su mensaje. Dicha transformación la rastreábamos a partir de una nueva forma de percibir, hablar y manipular conceptualmente las secuencias. Posteriormente estas acciones se transformaban en una forma segura, rápida y efectiva de calcular algo, por ejemplo cuando solicitamos *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos en la Figura 500"* (ítem 6, Tarea 1), *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000"* (ítem 6, Tarea 2), *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y* *con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275"* (ítem 6, Tarea 3).

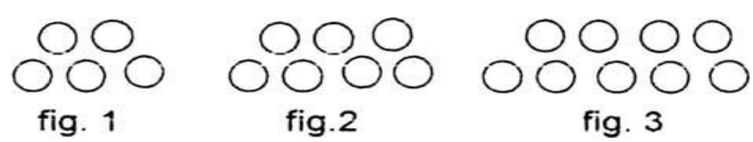
Estamos de acuerdo con Radford (2013a, p. 38) cuando señala que "la objetivación, o la transformación del saber "en sí mismo" en un objeto de conciencia, no es el resultado de actos solitarios ni es el resultado de la contemplación". La transformación es el resultado de una actividad material sensorial o sensitiva conjunta, en otras palabras, una actividad en donde el estudiante y la profesora u otro compañero se ponen en riesgo. Este riesgo lo interpretamos como una lucha entre profesora y estudiante o estudiantes por comunicar algo, comprender algunas características de las secuencias, intentar identificar el patrón, etc., en esa zona de desarrollo próximo vygotskiana.

Durante las sesiones desarrolladas a partir de las tres primeras tareas, deliberadamente preguntamos en algunas entrevistas focalizadas y de manera reiterada a algunos estudiantes, por *"el número de círculos o cuadrados de una figura cualquiera"* y fuimos más allá, pues también les solicitamos que nos dijeran *"el número de círculos o cuadrados correspondiente a la figura n"*. Esperábamos que, frente a la solicitud, ellos refirieran alguna figura o término en particular, pues entendíamos que este tipo de lenguaje matemático no estaba en la experiencia cultural de los estudiantes.

NOMBRE: ____

Edad: ________________ ***Curso:*** _______________ ***Fecha:*** ______________

Recuerda la secuencia de círculos:



La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

Figura 18. Tarea 4: Problema del Mensaje

Desde nuestra perspectiva vygotskiana, el pensamiento puede desarrollarse. En ese sentido, propusimos el Problema del Mensaje (Tarea 4). A esta altura del trabajo queríamos, fundamentalmente, que la indeterminancia fuera nombrada y tratada analíticamente. Este problema difiere del propuesto por Radford en algunos trabajos (véase, por ejemplo, Radford, 2012a), ya que para los niños era importante escribir para un destinatario real, en este caso la profesora Estella, quien era una persona altamente estimada por ellos. En el Problema del Mensaje propuesto por Radford, el destinatario era un alumno de otro colegio que cursaba el mismo grado que los estudiantes a quien se les solicitaba elaborar el mensaje. Este hecho de que los estudiantes escribieran para alguien muy estimado los podría obligar a elaborar el mensaje con todos los detalles.

Considerábamos necesario hacer emerger los tres elementos o vectores que caracterizan el pensamiento algebraico (Radford, 2010b), por lo que podemos afirmar que este Problema del Mensaje se constituía en un recurso didáctico importante que pretendía movilizar en los estudiantes otros medios semióticos de objetivación para que ellos lograran finalmente nombrar explícitamente lo indeterminado y operar con él. Desde un punto de vista filosófico, queríamos que los estudiantes instanciaran una forma de razonamiento y de acción que ha quedado codificada culturalmente en la historia como lo es el pensamiento algebraico (Radford, 2013a).

Las Tareas 5 y 6 fueron propuestas para indagar por los medios semióticos de objetivación que lograban movilizar cuando abordaban secuencias numéricas y figurales en ausencia del recurso tabular, lo que en esta investigación hemos llamado secuencias puramente numéricas y secuencias puramente figurales, respectivamente. Manteníamos la hipótesis según la cual al parecer las secuencias figurales con apoyo tabular ofrecen índices geométrico-espaciales que movilizan formas perceptivas y gestuales en los alumnos, formas que parecen no ser movilizadas, o por lo menos no con la misma intensidad, en el caso de las secuencias numéricas con apoyo tabular y las puramente numéricas.

NOMBRE: ____

Edad: __________________ ***Curso:*** _________________ ***Fecha:*** ________________

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

5 7 9 11

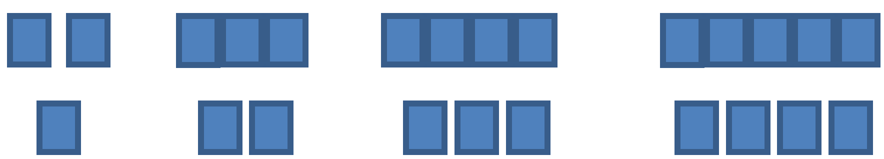
1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
2. ¿Cuál es el término siguiente?
3. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una marcada con un número. Cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. La profesora Johanna quiere que se escriba un mensaje a la profesora Estella, que será introducido en el sobre junto con la tarjeta, el cual explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese término.
4. Ahora, la profesora Johanna hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje a la profesora Estella en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.

Figura 19. Tarea 5: Secuencia puramente numérica

NOMBRE: ____

Edad: __________________ ***Curso:*** _________________ ***Fecha:*** ________________

Observa la siguiente secuencia



1. ¿Cuál consideras tú es la primera Figura?, ¿por qué?, ¿cuál es la segunda?, ¿cuál es la tercera? y ¿cuál es la cuarta?
2. Calcula el número de rectángulos que tiene la Figura 8. Explica la manera como procediste para encontrar la respuesta.
3. La profesora Estella quiere construir la Figura 12. Explícale a ella qué debe hacer para construirla.
4. Ahora la profesora Estella quiere construir una Figura grande. Explícale a la profe qué debe hacer para construirla.
5. La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de rectángulos que corresponde al número de la tarjeta.

Figura 20. Tarea 6: Secuencia puramente figural

Aún más, estábamos interesados en explorar recursos semióticos movilizados por los estudiantes al abordar secuencias puramente numéricas vs recursos semióticos movilizados al abordar secuencias numéricas con apoyo tabular, del mismo modo que explorar los recursos semióticos utilizados al enfrentar secuencias puramente figurales vs los recursos semióticos movilizados en el abordaje de secuencias figurales con apoyo tabular.

NOMBRE: ____

Edad: _______________ Curso: ______________ Fecha: _____________

En una sesión anterior, habíamos visto a la profesora Johanna que tenía una bolsa y dentro de ella introducía varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números correspondía a una de las figuras de una secuencia dada. Ella sacaba al azar una tarjeta y la introducía en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante hubiera visto el número de la tarjeta. La solicitud de Johanna era que el sobre fuera enviado a la profesora Estella con un mensaje que era introducido en el sobre junto con la tarjeta que contenía el número. Recuerda que este mensaje debía explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que correspondía al número de la tarjeta.

Un alumno escribió el siguiente mensaje:

"Profe Estella, para saber el número de círculos tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado que te dio le sumas 1, y el resultado que te dio corresponde al número de círculos de esa figura".

A partir del mensaje anterior, construye los cinco primeros términos de la secuencia.

Figura 21. Tarea 7: Problema del Mensaje al revés

Finalmente, en la Tarea 7 que hemos llamado el "Problema del Mensaje al revés", solicitamos a los estudiantes construir los primeros cinco términos de una secuencia, dado el mensaje elaborado por algunos de ellos (en realidad fue un mensaje ajustado). De nuevo, de acuerdo con nuestra posición vygotskiana del método genético o evolutivo, intentábamos comprender que la teleología del significado y de las interpretaciones que los estudiantes hacían respecto de las preguntas y solicitudes, no sólo reposa en las tareas diseñadas sino también en el evento o actividad tal cual como se desarrollaba y en la organización didáctica de esa actividad.

Por supuesto ya en esta tarea aparece, en el contenido del mensaje dado, lo indeterminado explícitamente nombrado y tratado analíticamente. Para los propósitos de nuestra investigación, era importante explorar la manera como los estudiantes usaban lo indeterminado analíticamente para producir una secuencia, no importaba si era figural o numérica.

3.4 Población, naturaleza de las sesiones de trabajo y proceso de recolección de la información

El trabajo de campo lo realizamos, inicialmente, con un grupo de 15 estudiantes de 4° y 5° de primaria (9-10 años) de un colegio público de la ciudad de Bogotá (Colombia), durante 13 sesiones de 2 horas cada una aproximadamente, entre los meses de abril y septiembre de 2012. Algunas de estas sesiones fueron combinadas con entrevistas focalizadas que, en general, permitieron conocer más de cerca la intimidad de las maneras de proceder de los niños y las niñas en las tareas y las justificaciones que esgrimían. El grupo finalmente se redujo a 13, pues 2 estudiantes desistieron de participar al cabo de la tercera sesión de trabajo.

Las sesiones fueron dirigidas por una profesora del colegio (institución en donde tomamos los datos de investigación), mientras que el autor del presente estudio estuvo en la grabación en video de las sesiones de trabajo con los estudiantes.[28] Dichas sesiones estuvieron precedidas por encuentros permanentes con la profesora en los cuales analizábamos y discutíamos no sólo la estructura y pertinencia de las tareas sino también la posible actuación de ella en las sesiones de trabajo con los estudiantes.

Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo los días miércoles y viernes, inicialmente, y luego sólo los miércoles. Los alumnos asistían a la biblioteca del colegio en las horas de la mañana y una vez terminaban las sesiones regresaban a sus clases regulares. En términos generales, los estudiantes, en sus propios términos, esperaban “aprender cosas nuevas de matemáticas”, aspecto que se vio reflejado, al menos, en la percepción por parte de ellos de unas clases diferentes de las recibidas en el colegio (en sus clases regulares). Es necesario reconocer la disposición positiva de los estudiantes durante todas las sesiones de trabajo, aun cuando se presentó en las tres primeras sesiones cierta timidez por parte de algunos alumnos cuando intentaban participar en el trabajo de socialización al interior de los

[28] La profesora es magíster en docencia de la matemática y su tesis de maestría asumió como marco teórico la teoría cultural de la objetivación. De esta manera ella estuvo familiarizada con algunas herramientas analíticas de la teoría, lo cual le posibilitaba capitalizar los momentos cuando intervenía en los pequeños grupos, es decir, contaba con elementos teóricos para plantear sus preguntas e indagar por los medios semióticos de objetivación que movilizaba los estudiantes cuando abordaban las tareas.

pequeños grupos que se conformaban, los cuales no siempre fueron integrados con los mismos estudiantes.

Teniendo como sustento los desarrollos de la teoría cultural de la objetivación, nos proponíamos desarrollar las sesiones de trabajo con los estudiantes siguiendo la estructura del Particular de Hegel. Desde luego con el diseño de las tareas expuesto en la sección anterior seguíamos la relación $\boldsymbol{\Phi}$.

La relación $\boldsymbol{\Theta}$, por su parte, refiere a la actividad planeada y la que propiamente se desarrolla (evento). En este sentido, las sesiones, en general, constaban de un trabajo individual, luego una discusión entre pequeños grupos y finalmente, en la medida de lo posible, una discusión general con el grupo completo. El primer estado de $\boldsymbol{\Theta}$ constaba de una presentación de la actividad por parte de la profesora (Radford, 2013a); posteriormente los estudiantes eran invitados a trabajar en los pequeños grupos conformados de dos o tres por grupo.

Posteriormente, la profesora visitaba los grupos en la idea de solicitar a algunos integrantes exponer las propuestas de solución de las tareas y comunicar a otro compañero o compañera esta solución, además de cuestionar y hacer las retroalimentaciones necesarias. Nos interesaba el intercambio de ideas (Radford & Demers, 2004) y propuestas de solución y la discusión entre los integrantes de los grupos. Coincidimos con Bajtín (1929/1992) cuando señala que el sujeto social se forma discursivamente, en el proceso comunicativo de yo con el otro, es decir que el discurso propio se construye en relación con el discurso ajeno, en el proceso de una íntima y constante interacción; el sujeto se desarrolla en tanto las actuaciones del otro, del discurso del otro.

Estamos convencidos de que la objetivación del saber presupone el encuentro con un objeto cuya apariencia en nuestra conciencia sólo es posible a través de contrastes. Nuestro conocimiento y comprensión de un objeto de saber sólo es posible mediante el encuentro con la comprensión que otros individuos tienen de este objeto de saber (Bajtín, 1979/2009; Vygotski, 1931/2000), pues consideramos que en la vía hacia el saber, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino por la presencia del otro en una especie de relación de alteridad bajtiniana.

Este tipo de relación bajtiniana nos parece importante en tanto queríamos reconocer la idea teórica de ser a través de los otros (Bajtín, 1979/2009), y en tal sentido propiciar los espacios para que los estudiantes interactuaran entre ellos, con la profesora y con el investigador. La idea de alteridad lleva a ver la interacción social no como un mero juego de negociación de significados, sino como un elemento constitutivo del saber cultural del que se apropia el alumno.

Justamente el proceso de subjetivación (Rancière, 1999; Roth & Radford, 2011) lo entendemos bajo la idea de "desarrollo de un sujeto-en-actividad" (Roth & Radford, 2011, p. 135). En un cierto momento, la profesora podía invitar la clase a una discusión general donde los grupos podían presentar sus ideas y otros grupos podían desafiarlos o proponer una generalización.

La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones. Este acopio se realizó en cuatro fases, y siguió las orientaciones de Miranda, Radford & Guzmán (2007). Éstas fueron:

Fase 1: Grabación en video de todas las actividades de clase. Esta grabación se realizó con una cámara que capturó, en algunos momentos, la sesión de clase completa, y en otros, discusiones focalizadas de algunos grupos en el aula de clase en el momento de resolver las tareas.

Fase 2: Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si la actividad no terminaba en una sesión, las hojas de trabajo se recogían y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

Fase 3: Transcripción de todos los videos correspondientes a las sesiones de trabajo.

Fase 4: Análisis de videos y de las hojas de trabajo en los cuales había evidencia de los procesos de resolución de las tareas sobre generalización de patrones.

A partir de estas cuatro fases y de sus respectivos análisis, y especialmente con base en las tareas propuestas sobre generalización de patrones en los cuatro contextos: secuencias figurales apoyadas por representación tabular, secuencias numéricas apoyadas por representación tabular, secuencias puramente numéricas y secuencias puramente figurales, en las entrevistas focalizadas (grabadas también en video), profundizamos en el pensamiento matemático de los estudiantes, el tipo de respuestas que daban, sus justificaciones, a partir de algunas entrevistas focalizadas.

Queríamos inquirir aspectos que iban emergiendo en el proceso, tales como respuestas no muy claras que los estudiantes daban, así como las interacciones en pequeños grupos en los cuales solicitábamos que algún estudiante explicara a otro su proceso de solución. También nos interesaba concentrar la entrevista en ciertos aspectos temáticos claves, como por ejemplo la manera como identificaban la comunalidad o característica común, el tipo de gestos que movilizaban y detectar, quizás, la movilización de varios recursos semióticos sincronizadamente, es decir, identificar la presencia de nodos semióticos.

En fin, no estábamos interesados en valorar respuestas correctas o incorrectas, sino en estudiar los procesos que desarrollaban los estudiantes (Goldin, 2000), en los cuales se podía identificar cierta evolución de medios semióticos de objetivación y cómo unos sustituían a los anteriores, al mismo tiempo que los estudiantes lograban concentrar los significados. Este proceso de objetivación llamado contracción semiótica (Radford, 2008b) nos informaba acerca de la toma de conciencia progresiva por parte de los estudiantes en una especie de reorganización psíquica de sus conciencias.

Las tareas planteadas estuvieron sujetas a un "control experimental" (Goldin, 2000), en las cuales, fue necesario considerar variables como, por ejemplo, el contenido matemático y la estructura, la complejidad y la estructura lingüística y semántica. Estamos de acuerdo con Goldin (1998, p. 53) cuando precisa que "un objetivo importante es obtener e identificar los procesos que los niños utilicen de forma espontánea". En otras palabras no nos interesaba indagar sólo el comportamiento sino las razones que motivaban a los niños y niñas a actuar de cierta manera en algún momento. Aún más, éramos conscientes de que estábamos actuando en un contexto social, psicológico y cultural. Goldin (1998, p. 58) argumenta que "el contexto influencia y permite contrastes en las interacciones que ocurren durante la entrevista y pone limitaciones en las posibles inferencias".

Por ejemplo, la redacción del Problema del Mensaje (Tarea 4) para ser presentado a los estudiantes, se convirtió en un ejercicio difícil, pues nos interesaba que tal estructura lingüística no introdujera elementos de dispersión y/o confusión, y que más bien los estudiantes al leerlo concentraran su atención en la exigencia de esta tarea y en las condiciones que establecía, de tal suerte que en el ejercicio de escritura del mensaje por parte de ellos a una profesora (la profesora Estella), lograran explicar con todos los detalles la manera de calcular el número de círculos.

Los encuentros permanentes con la profesora, quien dirigía las sesiones, tuvieron como insumos estos aspectos mencionados y fueron capitalizados en las entrevistas focalizadas. La entrevista, como lo señala Goldin (2000, p. 520):

> Hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales.

Estas entrevistas basadas en tareas contribuyeron a corroborar hipótesis, por ejemplo, inquietudes asociadas con la manera como los estudiantes identificaban el patrón, formas como iban reduciendo los recursos semióticos que movilizaban, significados que elaboraban, instrumentos semióticos que usaban, entre otras cuestiones. Este tipo de entrevista aportó su grano de arena en la identificación de elementos, indicios o descriptores relacionados con formas de pensamiento algebraico temprano en los estudiantes.

Nuestro interés estuvo centrado en el desarrollo conceptual (desarrollo de pensamiento algebraico), por ello el diseño de las tareas intentaba producir un desarrollo en los estudiantes. Este desarrollo lo asumimos como un proceso social de aproximación de significados subjetivos o personales a los significados histórico-culturales plasmados en la semiótica algebraica (Miranda, Radford & Guzmán, 2007), esto es, un proceso de objetivación.

3. 5 Constitución de los datos y descripción del análisis

En relación con la constitución de nuestros datos de investigación seguimos un abordaje metodológico de acuerdo con los planteamientos de Glaser (1978, 2002), Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006). El primer conjunto de datos está constituido por las transcripciones de todos los videos correspondientes a las 13 sesiones (14 transcripciones), las hojas de trabajo de cada uno de los estudiantes, algunas entrevistas focalizadas (que realizamos al interior de algunas sesiones de trabajo) y notas de campo del investigador. En relación con el número de hojas de trabajo, en este primer conjunto de datos, establecimos: 15 para cada una de las tres primeras tareas (para un subtotal de 45), 12 hojas de trabajo en relación con la Tarea 4, 13 hojas de trabajo tanto para la Tarea 5 como para la 6 (es decir, 26 hojas de trabajo) y 11 desarrolladas acerca de la Tarea 7, para un total de 94 hojas de trabajo durante las 13 sesiones llevadas a cabo.

El proceso de reducción y análisis de datos estuvo gobernado permanentemente por un criterio fundamental, el del *foco teórico*. Según este criterio, tuvimos siempre en consideración no sólo nuestra pregunta y objetivo de investigación, sino también los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación, los cuales nos permitían discernir y avanzar en el desarrollo de la habilidad de dar sentido a los datos. En este proceso de *sensibilidad teórica* (Glaser, 1978) fue fundamental la capacidad de comprender y de separar lo pertinente de lo que no era.

Considerando permanentemente nuestro foco teórico, procedimos a hacer una segmentación temática. De esta manera, marcamos con color verde, en los diálogos (transcripciones de los videos), sentencias, frases, expresiones, en fin, indicios que nos mostraban elementos o aspectos asociados con el pensamiento algebraico Factual. Marcamos con color café todo aquello que nos arrojaba información acerca del pensamiento algebraico Contextual y con color morado información que nos evidenciaba una indeterminancia analítica o algebraica, lo cual lleva consigo una designación simbólica o expresión semiótica.

Esta especie de codificación inicial o abierta (Glaser & Strauss, 1967; Soneira, 2006) fue apoyada con las producciones de los alumnos en las hojas de trabajo. En un proceso de *saturación teórica* (Glaser & Strauss, 1967; Soneira, 2006), revisamos exhaustivamente las producciones de los estudiantes, desarrolladas en estas hojas de trabajo correspondientes a cada tarea propuesta. Coincidimos con Soneira (2006, p. 156) cuando sostiene que:

> El investigador selecciona casos a estudiar según su potencial para ayudar a refinar o expandir los conceptos o teorías ya desarrollados. La "saturación teórica" significa que agregar nuevos casos no representará hallar información adicional por medio de la cual el investigador pueda desarrollar nuevas propiedades de las categorías.

Sin embargo, es necesario aclarar que a nuestro juicio la saturación teórica no tiene una interpretación objetiva, ni es calculable, ni medible. Consideramos que llega un momento en el cual hay que tomarse una responsabilidad personal como investigador y decidir que ya es suficiente. Soneira (2006, p. 157) precisa que "codificar supone siempre un *corte o fractura* de los datos"[29], lo cual sugiere un esfuerzo en leer y releer los datos para descubrir relaciones. El proceso nos llevó a seleccionar, como señalamos anteriormente, las hojas de trabajo, correspondientes a cada una de las tareas, que nos arrojaban información sobre las formas de pensamiento algebraico Factual y/o Contextual, vinculadas a los tres vectores o elementos que caracterizan el pensamiento algebraico. Es decir, nos interesaba información acerca de la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica que nos complementara o substanciara la información obtenida de nuestra codificación abierta en

[29] Cursivas en el original.

relación con lo Factual y/o Contextual llevada a cabo sobre las transcripciones de los videos.

En relación con el número de hojas de trabajo seleccionadas del total en cada una de las tareas establecimos lo siguiente: para la Tarea 1 seleccionamos 9 de 15 hojas de trabajo; 8 de 15 hojas de trabajo acerca de la Tarea 2; 6 de 15 hojas de trabajo con respecto a la Tarea 3; 6 de 12 en relación con la Tarea 4; en relación con la Tarea 5 seleccionamos 6 hojas de trabajo de 13; 8 hojas de trabajo de un total de 13 para la Tarea 6 y 3 hojas de trabajo de 11 con respecto a la Tarea 7. En total obtuvimos 46 hojas de trabajo seleccionadas que nos permitieron complementar la información proveniente de las segmentaciones temáticas. Algunas producciones correspondientes a preguntas o solicitudes que hacíamos en las tareas propuestas (hojas de trabajo) ya eran redundantes o no fueron pertinentes o no nos eran de utilidad.

En conclusión, los datos finales de la investigación (aun cuando vale la pena insistir que, a partir de los planteamientos de Glaser (1978, 2002), Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006), la información se convierte en dato cuando damos sentido a ésta a través de los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación) tienen dos dimensiones. Por un lado tenemos los extractos de diálogos de las transcripciones de los videos que segmentamos temáticamente y que permitieron identificar instanciaciones del pensamiento algebraico Factual/Contextual con sus respectivos vectores (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica). Establecimos 100 extractos de diálogos (verde para instanciaciones del pensamiento algebraico Factual, café para indicios o instanciaciones del pensamiento algebraico Contextual y morado para instanciaciones de la indeterminancia algebraica o analítica). La otra dimensión del dato tiene que ver con las producciones en las hojas de trabajo seleccionadas (46), descritas anteriormente y que permitieron saturar cada una de las categorías. Estos datos fueron objeto de profundización analítica con miras a responder nuestra pregunta de investigación.

A manera de ejemplo presentamos, en la Figura 22, un extracto de diálogo de la transcripción del video que ilustra parte del proceso de codificación abierta. De este diálogo correspondiente a la Sesión número 4 del 2 de mayo de 2012, identificamos algunos elementos asociados con el pensamiento algebraico Factual. Por su parte, en la Figura 23, también a manera de ilustración, presentamos un extracto de diálogo de la transcripción del video correspondiente a la Sesión número 11 del 18 de mayo de 2012. En este ejemplo podemos apreciar segmentos en color café y en color morado de frases que nos estaban dando indicios, respectivamente, de instanciaciones sobre el pensamiento algebraico Contextual y de un sentido de la indeterminancia tratada analíticamente, asociada a este estrato de pensamiento.

Profesor Johanna: Pero mira si tú pones 34 círculos abajo y 33 arriba ¿cuántos círculos tiene Esneider?
Estudiantes en coro: 67!
Profesora Johanna: Listo, entonces es lo que yo te quiero decir pero es que mira que estamos averiguando la figura que tiene 81 círculos.
Esneider: Por eso, dividiendo el (….) 67.
Profesora: ¿Qué es lo que divides?, ¿el 67?, ¿lo divides?. Y ¿cuánto te da?
Esneider: (…) Umm no.
Profesora Johanna: ¿Quién le explica a Esneider?, Luis ya explicó. Entonces ahora quiero que explique otro tú, ¿sí?, explícale a Esneider, mira la solución que tienen ellos [*dirigiéndose a Esneider*].
Estudiante: Usted tiene que restarle al 81 tres el resultado lo tienes que dividir por 2.
Profesora Johanna: Pero explícale a Esneider ¿por qué tienes que restarle 3?
Estudiante: **Porque la secuencia lo dice, porque por ejemplo aquí, 2 y le sumamos 2, esta es la figura 2 entonces se colocan dos círculos más, más dos, me darían 4 y al cuatro le resto 1 y le pongo 3 arriba.**

Figura 22. Parte de un ejemplo de codificación abierta que evidencia elementos de pensamiento algebraico Factual

Profesor Rodolfo: ¿Y por ejemplo, como sería la figura 5?
Laura Sofía: Sería 5 abajo [*hace una línea imaginaria con el lápiz debajo de la hilera inferior de la cuarta figura*] y 6 arriba [*hace lo mismo, solo que esta vez en la hilera superior de la misma figura*].
Profesor Rodolfo: [*Señala la hilera inferior de la figura 4*] Pero tú dices aquí 4, para ti esta es la figura 4 ¿no? [*Señalando la última figura, y ella asiente*], 4 arriba [*señala la hilera de arriba*], 4 abajo [*señala la hilera de abajo*] y ¿dijiste 1? [*Señalando el ultimo rectángulo de la hilera de arriba*]. ¿Entonces con la figura 5 procedes de la misma manera? ¿o cómo es?
Laura Sofía**: 5 abajo y 5 arriba [***mientras señala las hileras*] **más 1.**
Profesor Rodolfo: ¿Y la figura 6?
Laura Sofía: **6 abajo y 6 arriba, más 1.**
Profesor Rodolfo: ¿Cómo será, por ejemplo, Jenny, en la figura 15?
Jenny: **15 abajo y 15 arriba** [*sube la mano ligeramente*] **y le sumamos 1, serían 15 abajo y 16 arriba.**
Profesor Rodolfo: Ahora, el quinto punto ¿cómo lo resolviste tú Laura Sofía? Ábrelo para que lo vean.
Laura Sofía: [*Laura lee de su guía*] Profe Estella, **coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1.**
Jenny: Profe, yo tenía una pregunta. Era que si era de esta secuencia [*señala la secuencia de la guía de trabajo*] o de la anterior que trabajamos.

Figura 23. Parte de un ejemplo de codificación abierta que evidencia elementos de pensamiento algebraico Contextual y un sentido algebraico de la indeterminancia

Por ejemplo, en el caso de la expresión marcada con color morado mostrada en la Figura 23 *"Profe Estella, coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1"*, nos interesaba complementarla con la producción en la hoja de trabajo de la estudiante y substanciar la categoría con el ánimo de saturarla, es decir, al encontrar información similar estábamos ante la presencia de un dato redundante. Este proceso de identificar más propiedades de la categoría (pensamiento algebraico Factual y/o Contextual con sus tres vectores o elementos) a través de producciones de los estudiantes, desde luego nos implicaba reunir nueva información, después de la codificación abierta, analizada a la luz de los conceptos de la teoría de la objetivación.

Aún más, en el curso del trabajo con las tareas, la saturación teórica nos daba luces para no seguir reportando datos que fueran redundantes. Por ejemplo, había datos que nos informaban sobre la indeterminancia y la analiticidad en tareas como la 5 (Secuencia puramente numérica) y la 6 (Secuencia puramente figural), que decidimos no incluirlos pues en las anteriores tareas ya habíamos puesto suficiente evidencia de la presencia de estos vectores. Nos concentramos, pues, en estas tareas para indagar por los medios semióticos de objetivación que movilizaban los estudiantes, qué objetivaban y la manera como lo hacían cuando abordaban secuencias en ausencia del recurso tabular.

Compartimos la máxima de Glaser quien afirma que "los datos son siempre buenos hasta donde llegan, y siempre hay más datos para seguir corrigiendo las categorías con propiedades más relevantes" (Glaser, 2002, p. 1). Hacemos hincapié en que teníamos la necesidad de tomar decisiones y detener la substanciación de las categorías. En este sentido, nuestro proceso de reducción y análisis de datos, a partir de todas las transcripciones de los videos, hojas de trabajo de los estudiantes, notas de campo y entrevistas focalizadas, nos aseguró que las expresiones, frases y explicaciones de los estudiantes en los que nos basamos para el análisis, son representativos del fenómeno del que queremos dar cuenta en esta investigación, en este caso, de la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de 9 y 10 años, como consecuencia del diseño de tareas y de la actividad propiamente como se desarrolla.

Capítulo 4
Desarrollo de la Investigación
Análisis Multimodal

4.1 Introducción

En este capítulo presentamos el análisis realizado teniendo en cuenta la naturaleza de la investigación y la pregunta que nos formulamos en el Capítulo 1. Nos concentramos en las producciones de los estudiantes tanto en las hojas de trabajo seleccionadas como en las segmentaciones temáticas de las transcripciones de los videos. De esta manera, y teniendo en cuenta que la investigación aquí presentada se encuentra enmarcada en la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación propuesta por Radford (2006b, 2013a), se realizó un análisis basado en una *concepción multimodal del pensamiento humano* (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Arzarello, 2006).

4.2 Sobre la concepción multimodal del pensamiento humano en esta investigación

Decimos, siguiendo a Radford, Edwards & Arzarello (2009), que es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer, por lo que es clave en este análisis la consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Según Arzarello (2006), dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.).

Asumimos que el discurso de los estudiantes en el desarrollo de las sesiones es una práctica social en el sentido otorgado por Fairclough (1995, citado por Miranda, 2009). En concordancia con lo propuesto por Arzarello (2006), coincidimos con Fairclough cuando señala que el análisis debe tomar en cuenta la relación de los diferentes textos producidos en la actividad, que para el caso de nuestra investigación hemos considerado el texto escrito, el texto hablado y el texto gestual, desde luego con sus procesos de interpretación y producción, así como con su contexto social.

En otras palabras, somos conscientes de que ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gestuado por los estudiantes es analizado de manera aislada, por el contrario, estas formas de expresión y producción de significados fueron estudiados como el producto final de procesos de interacción social. Estos procesos se encuentran permeados por el objeto de la actividad y por la cultura a la que pertenecen los estudiantes.

Los recursos que movilizan los estudiantes "incluyen [también] comunicaciones simbólicas escritas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos físicos y electrónicos (calculadoras) y diversos tipos de movimiento corporal" (Radford, Edwards & Arzarello, 2009, pp. 91-92). Queremos una vez más insistir en que no estamos considerando los artefactos como meros auxiliares en el acto de conocer. El conocimiento llega a ser *conocimiento-con artefactos*, como opuesto a conocer vía estos artefactos. Como lo plantea Radford (2012b, p. 285), estos artefactos "se imbrican en la manera en que pensamos y llegamos a conocer". Por eso, como lo sugiere este mismo autor, el estatus epistémico de los artefactos significa que "como cambian los artefactos, así también lo hacen nuestros modos de conocer" (Radford, 2012b, p. 285).

Husserl (1931), Gehlen (1988), Merleau-Ponty (1945), citados en Radford, Edwards & Arzarello (2009, p. 92), a pesar de las diferencias en sus respectivas perspectivas, coinciden en un punto:

> El saber es mucho más que el resultado de mecanismos deductivos abstractos formales. Es crucial para la producción de saber la experiencia de la persona en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo.

Nemirovsky & Borba (2003) lo plantean de la siguiente manera:

> […] Understanding and thinking are perceptuo-motor activities; furthermore, these activities are bodily distributed across different areas of perception and motor action based on how we have learned and used the subject itself. [As a consequence] the understanding of a mathematical concept, rather than having a definitional essence, spans diverse perceptuo-motor activities, which become more or less active depending on the context.

En síntesis, la naturaleza multimodal de la cognición humana significa que en nuestros actos de conocimiento, diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, lo perceptual, lo kinestésico, etc., *llegan a ser partes integrales de nuestros procesos cognitivos.*

4.3 Análisis multimodal de las producciones de los estudiantes

Con base en el análisis de la fase de pilotaje e influenciados posteriormente por los desarrollos teóricos logrados, planteamos las siguientes tareas: secuencia figural con apoyo tabular (Tareas 1 y 2), secuencia numérica con apoyo tabular (Tarea 3), el Problema del Mensaje (Tarea 4), secuencia puramente numérica (Tarea 5), secuencia puramente figural (Tarea 6) y el Problema del Mensaje al revés (Tarea 7). El análisis multisemiótico[30] lo organizamos en función de estas tareas, a partir de las cuales rastreamos la actividad

[30] Queremos hacer hincapié en la naturaleza multimodal del pensamiento humano. Esta multimodalidad tiene razón de ser en tanto tengamos un espectro de recursos semióticos que se movilizan sincronizadamente o no. Es decir, lo multisemiótico refiere a la diversidad de recursos semióticos que se activan o movilizan en la actividad matemática y desde luego está en estrecha conexión con el pensamiento multimodal.

matemática de los estudiantes a través de sus producciones orales, escritas y gestuales, que se constituyeron en nuestro foco de atención.

Permanentemente seguimos la estructura de la terna de Hegel *(General, Particular, Singular),* pues consideramos que las formas codificadas (el saber o General en la terminología de Hegel) se presentarían a nuestros estudiantes como mera potencialidad, y, a través de la actualización, ellas adquirían un contenido conceptual actualizado o instanciado, es decir, un conocimiento. Sin embargo, también tenemos claro que este contenido conceptual no es algo que no sea mediado. En consecuencia, para adquirir actualidad, para que sea real, para que se manifieste en el mundo concreto, el contenido conceptual sólo puede aparecer a través de la actividad (el Particular en la terminología hegeliana).

Es necesario anotar, para efectos de claridad en los diálogos (transcripciones de los videos) presentados, que las participaciones de los estudiantes fueron caracterizadas por líneas (e.g., L1, L2,…), cada una de las cuales indica la ocasión en la que un solo estudiante habló. Si un grupo de estudiantes responde en coro, escribiremos "Estudiantes en coro". El número de línea vuelve a comenzar cuando cambiamos de tarea. En cada línea se escribió, en letra tipo *cursiva* y entre corchetes ([…]), si lo dicho por el estudiante fue acompañado de algún gesto o de algún símbolo escrito. Algunas palabras aclaratorias que sirven para dar coherencia a las elocuciones de cada participante fueron también escritas en ese tipo de letra y entre esos signos parentéticos. Los puntos suspensivos (…) son utilizados para indicar breves pausas hechas por parte de los estudiantes y de la profesora durante sus participaciones. Estos diálogos están acompañados, en la medida de lo posible, de las producciones en las hojas de trabajo en donde planteamos las tareas y de imágenes que reconstruyen algunos episodios de los videos y que muestran la movilización de medios semióticos de objetivación en la actividad matemática de los estudiantes.

4.3.1 Tarea 1: Secuencia figural apoyada por representación tabular (1). Esta tarea, tal y como fue justificada en el diseño de la investigación, pretendía junto con la actividad desplegada, además de familiarizar a los estudiantes con este tipo de secuencias, instaurar una forma de trabajo en pequeños grupos para que interactuaran y comunicaran sus propuestas de solución. A partir de los requerimientos o ítems 1 y 2, queríamos indagar las maneras como podían identificar el patrón en la secuencia, cuyo término general corresponde a $2n - 1$, con $n = 1,2,3, \ldots$

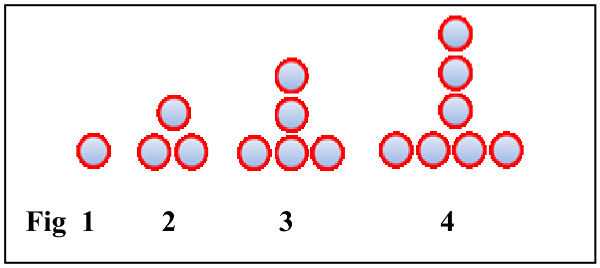


Figura 24. Secuencia figural apoyada por representación tabular (1) presentada en la Tarea 1

Desde nuestra estructura del Particular hegeliano, la profesora Johanna introdujo las secuencias. Ella dibujó en el tablero la secuencia de la Figura 24 y comenzó el siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: [*Mirando al tablero*] En el tablero yo he hecho unos dibujos [*señala con la palma de la mano las figuras en el tablero y dirige su mirada a los niños*], yo quiero que ustedes miren muy bien esos dibujos y que me digan [*dirigiendo su mirada al tablero*] ¿qué características encuentran ahí? o ¿qué cosas ven ahí? Entonces muy bien, entonces vamos por allá (…) José [*señala a José*] que está levantando la mano.

L2. José: [*Mirando el tablero*] En el 1 [*levanta un dedo indicando "1"*] hay una bola [*dibuja la bola con el dedo*] y en el dos [*levanta dedos índice y corazón*] hay tres [*baja los dedos anteriores y levanta los otros tres dedos*], porque de pa' allá hay dos y de pa' arriba también [*levanta las cejas, como buscando aprobación de la profesora*].

L3. Profesora Johanna**:** Ok, entonces miren lo que dice José: que en el uno hay una bola; no las vamos a llamar bolas sino círculos, ¿vale?, que en el 1 [*señala la figura 1*] hay una bola y en el 2 [*señala la figura 2*] hay 3, ¿listo?... eh, ahora, [*señala a Santiago*] ¿me recuerdas tu nombre (…)?

L4. Santiago: Santiago.

L5. Profesora Johanna: ¡Santiago!, listo Santiago.

L6. Santiago: eh (…), es que parece, en el 2 [*señala las figuras con todos los dedos de la* *mano derecha*] hay dos bolas abajo y parece que se le montara [*levanta un poco la mano y luego la baja rápidamente, simulando estar montando un círculo sobre el otro*] la del 1 encima [*con la otra mano, señala la figura 1 y hace como si la corriera encima de la figura 2*] de la 2 (…).

L7. Profesora Johanna: Ajam, bien.

L8. Santiago: (…) y eso sigue [*hace círculos hacia la derecha con su mano diestra*] sucesivamente hasta el 4.

L9. Profesora Johanna: Eso sigue sucesivamente hasta el 4. ¿Quién más quiere decirme algo de esa figura? Allá atrás Luis, bien.

L10. Luis Felipe: Que si por ejemplo ponemos 3 círculos abajo [*con el dedo índice hace círculos hacia la izquierda*] arriba encima del medio tenemos que poner 2.

Consideramos que éste es el primer contacto cultural de los estudiantes con este tipo de situaciones que involucran secuencias figurales apoyadas por representación tabular. El trabajo de la profesora Johanna consiste, básicamente, en lograr que ellos perciban características de esta figura e identifiquen el patrón a través del cual la secuencia se forma. Más específicamente, ella quiere llevar a los alumnos a tomar conciencia de la estructura espacial de la secuencia (Radford, 2013b) como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérico-espacial de la secuencia. La labor conjunta iniciada por la profesora pone de presente su compromiso ético (Radford & Roth, 2010), a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales con respecto a las de los estudiantes.

En esta labor conjunta, un aspecto a resaltar consiste en el indexical temporal que usa Santiago en su respuesta (L8) *"...sigue sucesivamente…"* lo cual sugiere que ha identificado la comunalidad o característica común, es decir, la relación entre las figuras de la secuencia. Nuestro análisis sugiere que Santiago quiere predicar no sobre una figura particular sino sobre todas las figuras trascendiendo el aquí y el ahora, sin embargo no ha logrado generalizar la comunalidad a todos los términos de la secuencia. En términos de Radford (2013b), no ha logrado plantear una abducción.

Luego de esta interacción con el grupo en general, los estudiantes comenzaron a trabajar de manera individual, y posteriormente en pequeños grupos. Contaron el número de círculos en las figuras 1, 2, 3 y 4 e identificaron rápidamente que el número de círculos aumentaba en el mismo número cada vez. Sin embargo, ya que los alumnos notaron rápidamente esta relación recursiva entre las figuras consecutivas, les pedimos que nos explicaran si había alguna manera de encontrar el número de círculos en la figura 25, sin construir la figura, o como fue solicitado en el ítem (3), *"Mateo quiere construir la figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla"*.

Intentábamos lograr que los estudiantes produjeran una explicación que mostrara indicios de alguna generalidad en relación con la manera de construir figuras grandes. Más específicamente, queríamos invitarlos a producir una generalización de la propiedad, o característica común, a los términos subsecuentes de la secuencia, esto es, a plantear una abducción (Radford, 2013b). Mostramos a continuación las producciones de Esneider, Jenny y Luis Felipe, en tanto las consideramos representativas.

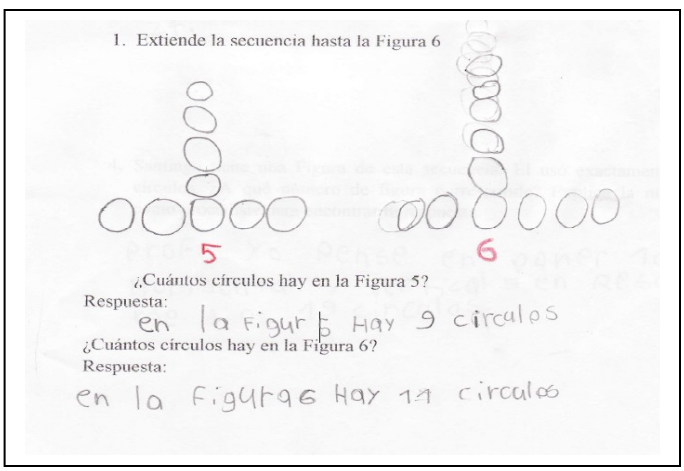


Figura 25. Producción de Esneider a la solicitud 1 de la Tarea 1

L11. Profesora: Listo, a ver Esneider cuéntanos por ejemplo, a ver ¿cuál fue tu solución?, explícame la figura 5.

L12. Esneider: En la figura cinco me dieron 9 círculos.

L13. Profesora: En el 5 [*Refiriéndose a la figura 5*] te dieron 9 círculos, en el 5 ¿cómo te dieron esos 9 círculos?, a ver ¿por qué?

L14. Esneider: Ehh, porque ehh, aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos [*Señalando la fila de la figura 5*] y como en el 4 [*figura 4*] habían 4 círculos abajo [*Señalando la fila de la figura 4*] ahora se le ponen 4 círculos encima [*Señalando los 4 círculos de la columna de la figura 5 contando de arriba hacia abajo*].

L15. Profesora: A ver, espérenme un segundito, a ver Esneider tú me dices que aquí hay 5 [*Señalando los círculos de la fila de la figura 5*] porque aquí había cuatro [*Señalando los círculos de la fila de la figura 4*] y que aquí hay 4 [*Señalando los círculos de la columna de la figura 5*] ¿por qué?

L16. Esneider: Ehh (…) porque encima del 5 [*Señalando la fila de la figura 5*] se colocan los números anteriores [*haciendo referencia con su mano a las figuras anteriores*].

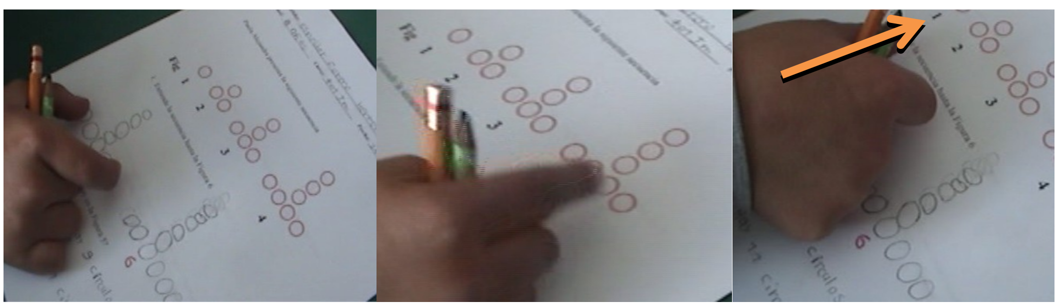
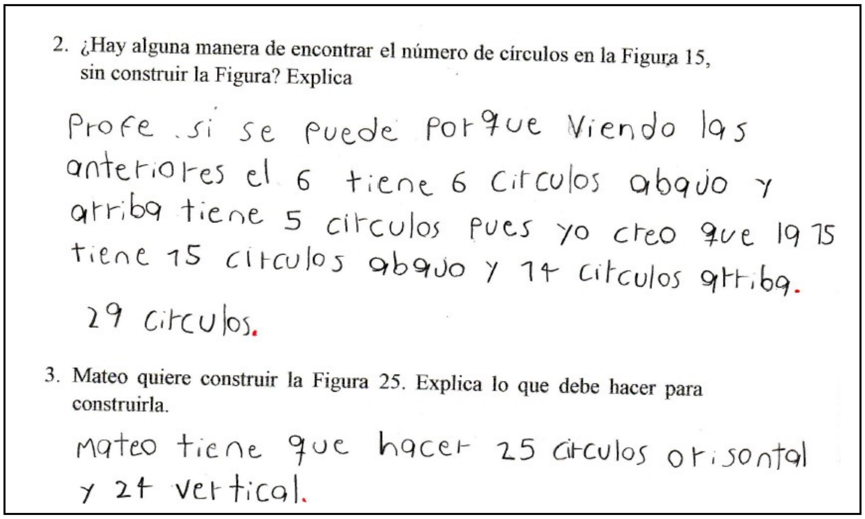


Figura 26. Coordinación multimodal de recursos semióticos en una secuencia de señalamientos de Esneider frente al ítem 1 de la Tarea 1. En la figura de la izquierda moviliza un gesto indexical señalando los círculos horizontales. La figura del centro muestra el recurso de Esneider del número de círculos horizontales de la figura anterior. Finalmente, en la figura de la derecha se muestra cómo Esneider retorna a la figura 5 y hace un deslizamiento para describir la posición y el número de círculos que deben ir en la posición vertical. Reconstrucción del video

En este caso, Esneider encuentra una manera de construir las figuras 5 y 6 en la cual su actividad perceptual o más bien su *intención perceptiva* (Radford, 2013b) juega un papel importante. Observa que, por ejemplo, la figura 4 se ha construido poniendo tres círculos verticales como aparecen horizontalmente en la figura anterior (figura 3). No tiene dificultades con la construcción de los círculos horizontales, pues ha reconocido una función del número de la figura en relación con el número de círculos horizontales. En su declaración (L14) "*ehh, porque ehh, aquí primero, tiene que ir abajo 5 círculos",* el sentido de obligatoriedad en la sentencia *"tiene que ir primero",* pone en evidencia la movilización de intención perceptiva o actividad perceptual como un recurso semiótico al reconocer la manera como se ha configurado la secuencia, al menos en relación con los círculos en posición horizontal.

Esneider acompaña sus señalamientos (Figura 26) con sentencias (L14, L16) y con su actividad perceptual. Esta acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un nodo semiótico (Radford, 2009), es decir, un segmento de la actividad semiótica en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos se complementan para lograr una toma de conciencia de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico (Radford, 2013b).

Desde nuestra perspectiva teórica de la objetivación, reconocemos que el conocimiento y comprensión de un objeto de saber por parte de los estudiantes es posible mediante el encuentro con la comprensión que otros individuos tienen de este objeto (Bajtín, 1979/2009; Vygotski, 1931/2000). La presencia de los otros compañeros y de la profesora Johanna no es periférica. Muy al contrario, en la vía hacia el saber, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino por la presencia del otro en una especie de relación de alteridad bajtiniana (Bajtín, 1979/2009). Esta idea de ser a través de los otros nos conminó a propiciar los espacios para que los estudiantes lograran interactuar. Por ejemplo, la producción de Jenny y luego la de Luis Felipe siguen de manera similar el trabajo efectuado por Esneider, o tal vez, para ser más precisos, consideran los acuerdos generados en la discusión de clase. En relación con los ítems 2 y 3, Jenny deja ver en su producción que se ha apoyado en las tres figuras anteriores y la 4 y la 5 construidas por ella.



2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica

Profe .si se puede porque viendo las anteriores el 6 tiene 6 circulos abajo y arriba tiene 5 circulos pues yo creo que la 15 tiene 15 circulos abajo y 14 circulos arriba.

29 circulos.

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.

Mateo tiene que hacer 25 circulos orisontal y 24 vertical.

Figura 27. Producción de Jenny sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 1

La evidencia mostrada en la Figura 27 sugiere que Jenny ha objetivado una regularidad y ha concebido las figuras como divididas en dos líneas, la "de arriba" y la "de abajo" (realmente la fila vertical y la horizontal). Su intención fenomenológica (Radford, 2013b) le permite atender a estas determinaciones sensibles e incluso notar diferencias y similitudes. Las diferencias estarían dadas por los números de círculos en las dos líneas, mientras que las similitudes por las maneras como se conforman las figuras. Ella dice *"...pues yo creo que la 15 tiene 15 círculos abajo y 14 círculos arriba…"*, como parte de la respuesta al ítem 2. En este caso, "el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérica y otra de tipo espacial" (Radford, 2013b, p. 8). Jenny establece una relación entre el número de la figura y el número de círculos en la parte horizontal, por un lado, y, por otro, una relación entre el número de círculos horizontales y el número de círculos verticales. Para esta estudiante, el número de círculos verticales equivale al número de círculos horizontales menos uno. El trabajo llevado a cabo en el terreno fenomenológico, por ejemplo a través de la manera espacial de percibir la secuencia, le permite a Jenny responder al ítem 3 rápidamente.

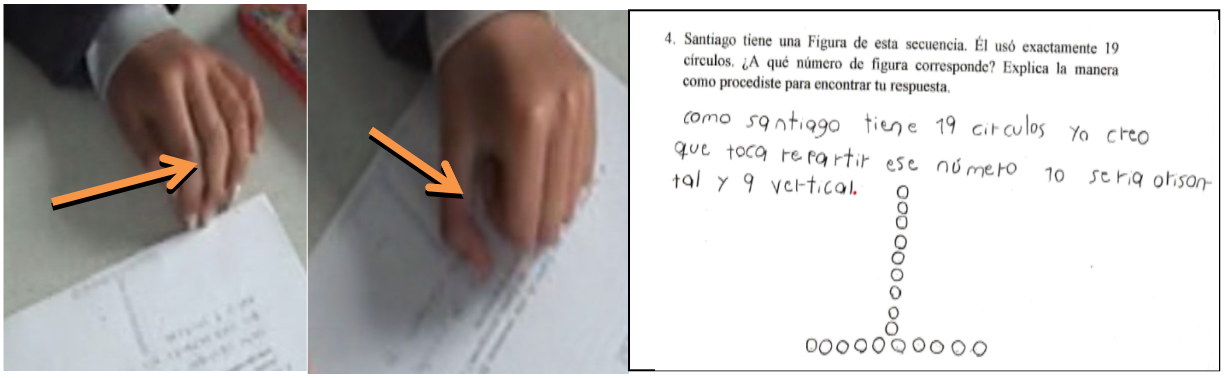


Figura 28. Secuencia de gestos como deslizamientos de Jenny. La imagen de la izquierda muestra el deslizamiento de la mano de Jenny indicando los círculos horizontales. La imagen del centro presenta un deslizamiento hacia arriba para indicar los círculos verticales. Reconstrucción del video. A la derecha, la producción de Jenny en relación con el ítem 4 de la Tarea 1.

El ítem 4 pretendía profundizar en el uso de la regularidad o en la captura del patrón. Dado un número de círculos particular de la secuencia, queríamos que los estudiantes explicaran la manera como procedieron para encontrar su respuesta. Si bien era una figura “construible” pues está en el campo perceptual de los estudiantes, queríamos que ellos movilizaran otros medios semióticos, por ejemplo recursos lingüísticos.

De acuerdo con las imágenes de la izquierda y del centro de la Figura 28, sugerimos que tanto la actividad perceptual como el deslizamiento de la mano están indicando una percepción espacial de la figura. El capturar la regularidad, sin embargo, no es suficiente para garantizar la generalización, pues tal regularidad debe generalizarse, es decir, transformarse en abducción.

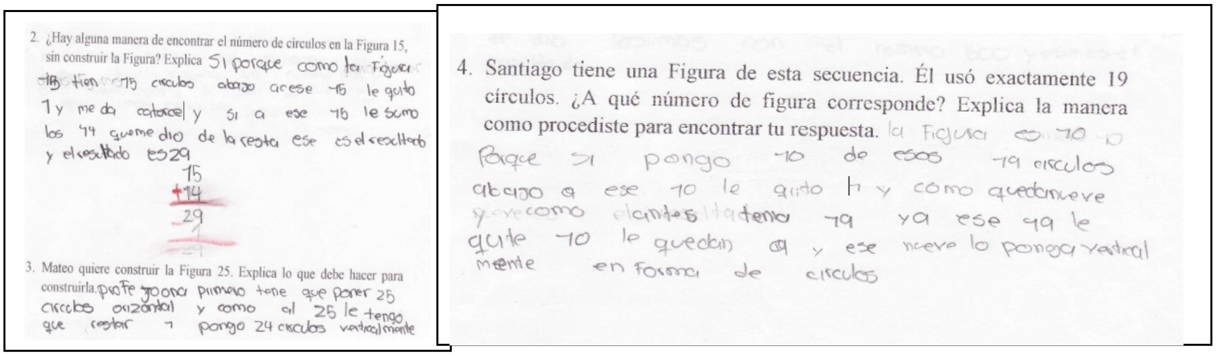


Figura 29. Producción de Luis Felipe sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 1

Las relaciones establecidas por Jenny son también puestas en funcionamiento por parte de Luis Felipe. En su respuesta al ítem 2, explicita la suma que le permite obtener el número de círculos en la figura 15. Este procedimiento le abona el camino para proponer el mensaje a Mateo en el ítem 3. Por su parte, con respecto al ítem 4, manifiesta que la figura es la 10 "*porque si pongo 10 de esos 19 círculos abajo a ese 10 le quito 1…*".

Observemos que en estas acciones los niños están operando sobre números, sobre casos particulares. Esta forma de proceder pone de presente funciones corporeizadas o predicadas con una variable tácita (Radford, 2010a), las cuales hacen parte de la instanciación del saber entendido como posibilidad, en este caso, pensamiento algebraico Factual, pues la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación o del discurso. Más bien, está presente a través de la aparición de algunos de sus casos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 25, 500). No vemos explícitamente una analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado, más bien estaríamos ante la presencia de una analiticidad intuida o proto-analiticidad.

Aceptamos que ello tiene que darse porque estamos estableciendo, en las tareas, exigencias que permiten a los estudiantes posibilidades de expresión semiótica, sin embargo, al mismo tiempo, éstas imponen limitaciones, pues inducimos a los estudiantes a centrar sus indagaciones en casos particulares. Consideramos que los requerimientos hechos en este contexto numérico propulsan formas culturales de interacción y de cooperación (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a) que hacen pensar en que sus significados (culturales) necesariamente van a tener un anclaje histórico vinculado justamente con lo numérico. Dichos significados, mediados culturalmente (Bruner, 2006), están supeditados a un sistema de símbolos compartidos evidenciados en el tipo de preguntas o requerimientos que hacemos. Los sistemas semióticos de significación cultural (Radford, 2008a) están operando a través de las tareas que proponemos y de las actividades como eventos (i.e. tal y como se desarrollan).

Desde la perspectiva del materialismo dialéctico los modos de producción (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a) incluyen saberes, habilidades y aspectos técnicos de colaboración, lo cual sugiere que los procedimientos efectuados por los estudiantes se incrustan en las formas culturales de interacción las cuales organizan el contacto entre los estudiantes y entre ellos y la profesora.

Las producciones sugieren que los estudiantes están actualizando una forma de pensamiento algebraico Factual, en tanto éstas están ancladas en un nivel particular o sobre hechos factuales, es decir, hay instanciación a través de operaciones con números y movilización de gestos como los deslizamientos mostrados en la Figura 28. Además, las evidencias sugieren las formas como los estudiantes entre ellos y cada uno de ellos con la profesora Johanna se involucraron en la actividad, de cómo ellos respondieron uno al otro en una labor conjunta (Radford, 2013a). En este sentido, cobran actualidad las relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$ que conforman la estructura de nuestro Particular hegeliano. Los estudiantes están instanciando una forma de pensamiento algebraico (Factual) que ha quedado codificada en la cultura.

4.3.2 Tarea 2: Secuencia figural apoyada por representación tabular (2). Tal y como lo justificamos en el diseño de nuestra investigación, trabajar con la Tarea 2 pretendía acercar más a nuestros estudiantes no sólo a la idea general de secuencia sino también al tipo de secuencias figurales apoyadas por representación tabular. En este caso el término general corresponde a $2n + 3$, con $n = 1,2,3, \dots$

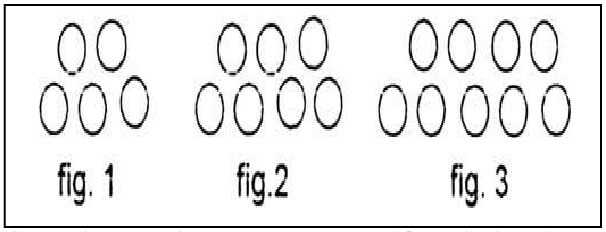


Figura 30. Secuencia figural apoyada por representación tabular (2) presentada en la Tarea 2

En relación con esta tarea nos vamos a detener en el análisis de las producciones correspondientes al item 6: *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000"*. El interés en este análisis focalizado está motivado por dos razones. En primer lugar, las producciones de los estudiantes a los ítems anteriores en esta tarea, en general, coinciden con las que se obtuvieron en la Tarea 1. En segundo lugar, queremos indagar más de cerca las instanciaciones o producciones en relación con este ítem.

Sin embargo, antes de abordar dicho análisis, nos parece pertinente indagar sobre el ítem 2: *"Calcula el número de círculos de la figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces"*. En este diálogo también interviene el autor de la presente investigación. La profesora Johanna indaga con varios estudiantes la manera como resolvieron el ítem 2 de esta tarea y en un momento de la interacción decide preguntar si algún alumno había respondido de manera distinta.

L1. Profesora Johanna: ¿Alguien lo construyó diferente?

L2. Laura Sofía: Sumando 9 más 9 da 18 y 3 [*pausa*] 21.

L3. Profesor Rodolfo: Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?

L4. Profesora Johanna: Sí, enséñame acá en la figura [*señala con su mano la secuencia*] ¿cómo es?

L5. Laura Sofía: Porque 1 más 1 da 2 [*pausa*] [*tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo*] sumándole 3 [*hace circular su dedo alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1 después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo], [estos tres círculos los denomina "la torre"*].

L6. Profesora Johanna: ¿Y en la figura número 2?

L7. Laura Sofía: 2 más 2, 4 [*pausa*] [*a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba*], sumándole 3 [*con su dedo índice derecho señala la torre*].

L8. Profesora Johanna: ¿Y en la figura 3?

L9. Laura Sofía: 6 [*pausa*] [*ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha*] y sumándole 3 [*con su dedo índice derecho señala la torre*].

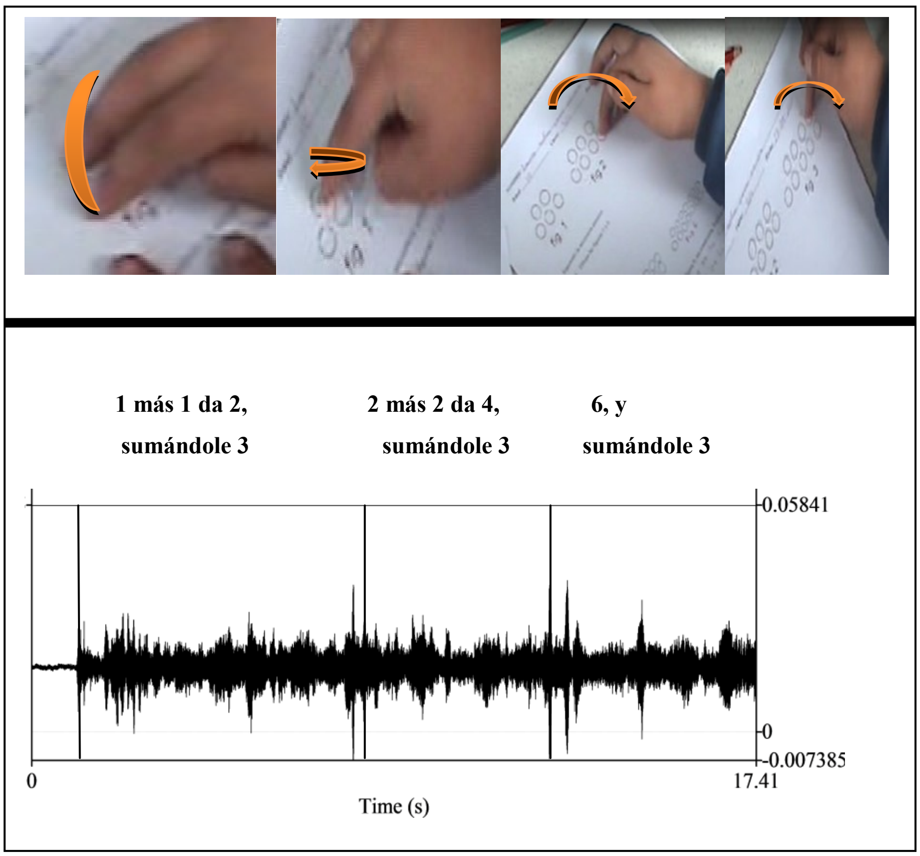


Figura 31. Arriba: Secuencia de gestos (señalamientos) que despliega Laura Sofía acompañada de palabras. Reconstrucción del video. Abajo: Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Laura Sofía (L5, L7, L9) con intervenciones de la profesora Johanna (L6 y L8)

La solicitud que hace el profesor Rodolfo (L3), "*Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?"*, provoca una respuesta en Laura Sofía. Ella despliega en la secuencia una serie de señalamientos los cuales recorren las tres figuras dadas. En la Figura 31, parte de arriba, se muestra la cadena de gestos como señalamientos que le permite comunicar a Laura Sofía la objetivación del patrón acudiendo a la torre como recurso semiótico. En la parte de abajo de la Figura 31 mostramos un fragmento de 17.41 segundos a través del programa Praat, en el cual ella en una estructura casi rítmica, como lo muestra la forma de onda, hace sus elocuciones "1 más 1 da 2, sumándole 3", "2 más 2 da 4, sumándoles 3", "6, y sumándole 3". Mostramos en la Figura 32 la movilización de dos gestos indexicales. El primero corresponde a la acción de tapar los círculos subitizadamente y, al hacer una pausa, luego despliega el segundo gesto indexical señalando la torre. De esta manera procede con las figuras 2 y 3. Sin embargo, según las observaciones en el diálogo (L7) notamos que a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba. En L8, por su parte, ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha para luego señalar de nuevo la torre. El análisis prosódico sugiere que el ritmo emerge como un medio semiótico de objetivación, evidenciado en el conteo, la pausa hecha y luego el gesto de señalar la torre. El ritmo crea la expectativa de un próximo evento (You, 1994), pero además, "constituye un medio semiótico de objetivación crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares" (Radford, 2010b, p. 50).

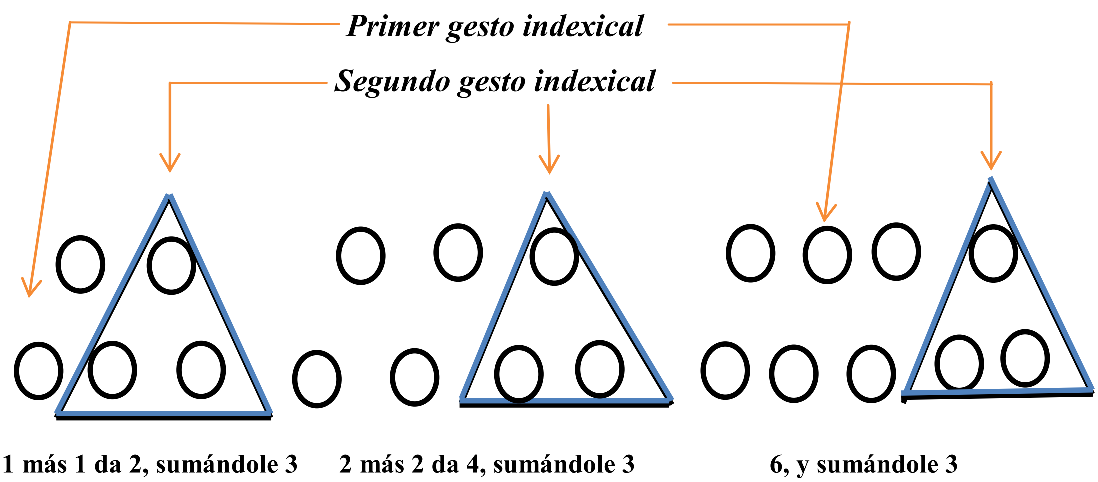
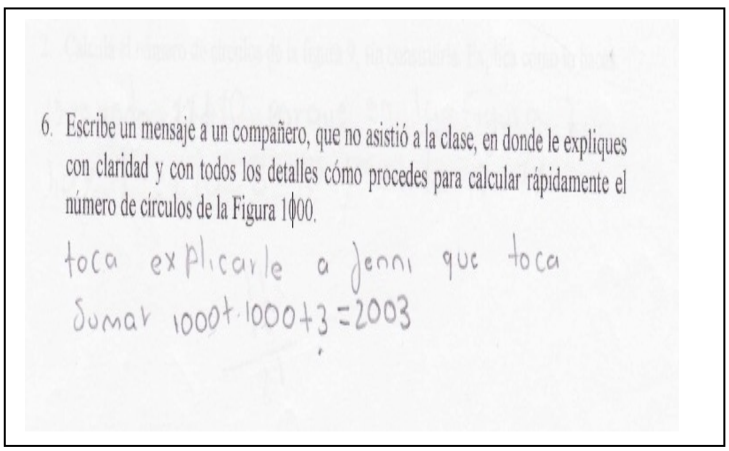


Figura 32. Movilización de gestos indexicales por parte de Laura Sofía

El recurso semiótico la torre que emerge se convierte en un medio semiótico de objetivación importante que le sirve, entre otras cosas, a Laura Sofía para contar el número de círculos de la fila de arriba y el de la fila de abajo, los cuales son iguales. En este proceso de semiosis perceptual, la actividad de coordinación de deícticos espaciales (gestos como señalamientos), ritmo, palabras y actividad perceptual, se convierte en un *nodo semiótico* que caracteriza la actividad reflexiva de Laura Sofía mediada por estos medios semióticos de objetivación.

El análisis microgenético (Vygotski, 1978) de su actividad sugiere el papel central que desempeñan los deícticos espaciales, gestos y el ritmo en la semiosis perceptiva (Radford, Bardini & Sabena, 2006), sobre todo en los procesos progresivos de Laura Sofía de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización. En su actividad perceptual, al separar la torre, esta estudiante percibe la igualdad en el número de círculos de arriba y de abajo. Como lo sugiere Radford (2013b, p. 5), “la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada”.


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

toca explicarle a Jenni que toca Sumar 1000+1000+3=2003

Figura 33. Producción de Laura Sofía, ítem 6 de la Tarea 2

Inclusive, podemos ir más allá y afirmar que Laura Sofía en una forma subitizada cuenta el número de círculos de arriba y el número de círculos de abajo al notar la separación de la torre en la figura 3: *“6, y sumándole 3”*. Observemos que ella efectúa una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. Este esquema permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación. Esta generalización de acciones numéricas incrusta su huella en la sintaxis de la formulación que expresa en relación con el ítem 6. Su declaración: "*toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000 + 1000 + 3*", sugiere la aplicación del esquema operacional pues la forma como ha procedido para calcular el número de círculos de las figuras 1, 2 y 3 la pone en marcha para el cálculo del número de círculos correspondiente a la figura 1000. Aquí lo indeterminado o lo general queda sin nombrar. En otras palabras, Laura Sofía ha afectuado una generalización algebraica Factual.

Consideramos la expresión semiótica producida por Laura Sofía como parte de la instanciación del saber, entendido éste como forma de pensamiento algebraico Factual (Radford, 2013a). Recordemos que desde nuestra epistemología hegeliana, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Como dice Radford (2013a), el saber es pura posibilidad. Adquiere realidad a través de la actividad concreta tal y como se desarrolla. Esto es, el pensamiento algebraico Factual se actualiza a través del Particular, es decir, a través de la actividad en tanto evento. Esta actividad o labor conjunta se conforma no sólo de las preguntas y solicitudes emergentes que hace la profesora Johanna (L1, L4, L6, L8), sino también de la actividad semiótica de Laura Sofía a través de la movilización de recursos semióticos (L5, L7, L9). Observamos de nuevo aquí cómo el compromiso ético de la profesora respeta y valora las producciones de Laura Sofía. Este togethering (Radford & Roth, 2010) pone en emergencia la manera ética en que la profesora y la estudiante se involucran, responden y ajustan la una a la otra.

Desde nuestra perspectiva hegeliana, sugerimos que Laura Sofía está actualizando una forma cultural de acción y reflexión (una pura posibilidad) la cual se materializa en la actividad teórica sensorial (particularidad) de reflexión sobre lo que es requerido para responder acerca del mensaje de la Figura 33. Consideramos dicha reflexión sobre una secuencia específica como lo Singular o Individual en los planteamientos de Hegel. En términos de Radford (2013a), Laura Sofía lleva a cabo su actividad dentro de un particular e irrepetible actividad de salón de clase –un Particular, el cual es un único evento al escribir el mensaje en el que explica a un compañero cómo calcular rápidamente el número de círculos de la figura 1000 en un cierto momento y lugar y a través de una cierta relación con los compañeros y la profesora.

La discusión entre Laura Sofía, la profesora Johanna y el profesor Rodolfo es capitalizada por los demás compañeros de la clase. Particularmente, Luis Felipe se apropia de este recurso cultural (la torre), pero en realidad es apropiado por un buen número de estudiantes. En la Figura 34 mostramos parte del proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe al identificar la torre.

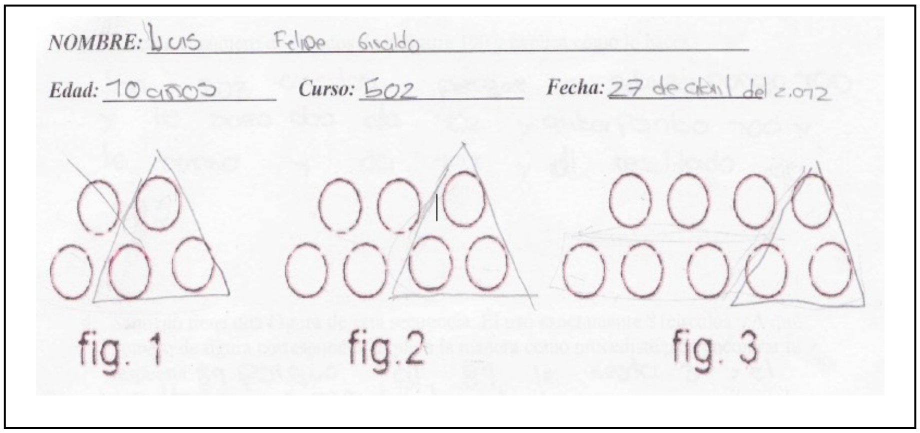
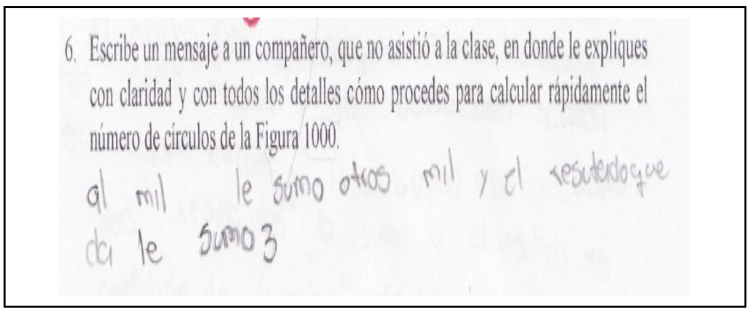


Figura 34. La torre como medio semiótico de objetivación presente en el proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe

Este medio semiótico no es un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes. Funge como medio semiótico de objetivación en tanto media los actos intencionales de ellos. Las evidencias sugieren que las diversas instanciaciones del saber (en este caso el pensamiento algebraico Factual), esto es, el conocimiento que van logrando los estudiantes llega a ser *conocimiento-con la torre*, como opuesto a conocer vía la torre. Como lo sugiere Radford (2012b), estos artefactos se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer, lo que en términos de Cole & Wertsch (1996) se plantea en el sentido que estos instrumentos recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano.

En otras palabras, la torre, en tanto recurso semiótico, regula en cierto momento la actividad de estos estudiantes, condiciona las formas como ellos se apropian, construyen o re-significan dicha actividad y desde luego las maneras de pensar. Queremos subrayar, además, que los modos de pensamiento y de acción de los estudiantes, en relación con esta tarea, están regulados no sólo por la torre sino también por el tipo de situaciones que proponemos, en este caso, las secuencias figurales apoyadas por representaciones tabulares. Desde un punto de vista dialéctico materialista, podríamos señalar que los modos de producción (saberes, habilidades y aspectos técnicos de colaboración) son procedimientos culturales de producción y reproducción de la vida material y espiritual.

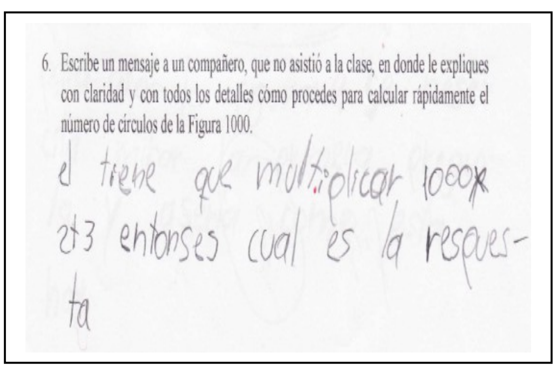
Destacamos aquí que para instanciar una forma de pensamiento como el algebraico Factual, es fundamental la experiencia de los estudiantes en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo (Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Arzarello, 2006), tal y como lo evidencian las actuaciones de los estudiantes en esta tarea.


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

al mil le sumo otros mil y el resultadoque da le sumo 3

Figura 35. Producción de Luis Felipe, ítem 6 Tarea 2

La producción de Yaneth en relación con el ítem 6 de esta Tarea 2 (Figura 36) es diferente a la producción, por ejemplo, de Luis Felipe (en la Figura 35).


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

el tiene que multiplicar 1000x 2+3 entonses cual es la respues-ta

Figura 36. Producción de Yaneth, ítem 6 Tarea 2

Tal diferencia reside en que la producción de Yaneth se hace sobre una forma reducida de expresión, *"él tiene que multiplicar 1000x2+3"*. La multiplicación sofisticada presente en la expresión de Yaneth sugiere una actividad perceptual refinada, en tanto hay evidencia de un proceso de subitización en la manera como percibe la figura (al ver que, una vez separada la torre, el número de círculos de la fila superior y el de la fila inferior son iguales). En la producción de Luis Felipe, *"al mil le sumo otros mil y el resultado que da le sumo tres",* se evidencia una escogencia de determinaciones sensibles en el terreno fenomenológico. Su intención perceptiva, dirigida a la estructura espacial, involucra la necesidad de sumar y por lo tanto sugiere una acción distinta en tanto descompone la figura en filas (la de arriba y la de abajo).

Observemos cómo la expresión de Yaneth utiliza una notación multiplicativa, podríamos decir, más condensada. La de Luis Felipe es aditiva, por lo que la producción de Yaneth sugiere una especie de proceso genético en el cual toma decisiones entre lo que se considera relevante e irrelevante, es un síntoma de aprendizaje y de desarrollo conceptual, es decir, de toma de conciencia.

Esta idea de conciencia individual la estamos considerando como una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta representada en la secuencia propuesta, a partir de la cual Yaneth se sensibiliza de esta forma u objeto cultural, el cual le permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, en este caso de Luis Felipe. Sugerimos que Yaneth ha desplegado un proceso social, sensible y material de objetivación, en últimas, podemos afirmar, es un principio de contracción semiótica, en tanto en su producción se evidencia cierta sobriedad en su pensamiento, traducida en la expresión multiplicativa (*1000x2…).* Esta sobriedad de su pensamiento se ve materializada en la forma condensada de las dos figuras que ha percibido, pues reduce o abrevia lo aditivo en la expresión semiótica de Luis Felipe (*al mil le sumo otros mil…).*

Para Yaneth y Luis Felipe, la encarnación (*embodiment*) de la fórmula en la acción y en el lenguaje natural es potente, pero tiene sus límites. Lo indeterminado en sí no aparece como objeto de discurso. En este caso podríamos hablar, al menos, de dos indeterminadas o variables: el número de la figura (variable independiente) y el número de círculos en posición horizontal (variable dependiente).

En el siguiente diálogo, que corresponde a una entrevista focalizada, se pretendía indagar más de cerca sobre la manera como usaban la comunalidad que ya habían identificado para calcular el número de círculos de figuras remotas.

L10. Profesor Rodolfo: Por ejemplo si yo te pregunto a ti Sunner, ¿cuántos círculos? (...) o no ¿cuántos círculos?, miren, miren, escuchen la pregunta que yo le voy a hacer a Sunner. Así sin escribir nada. Me vas a escuchar nada más, ¿cómo haces para hallar?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos?, ¿sí?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos que tiene la figura 2000?

L11. Sunner: Mmm (…) multiplicando el resultado [*por 2*], entonces sería 4000 (…) 4000 (…) [*Mira a su compañero de grupo Kevin*].

L12. Kevin: 4003.

L13. Sunner: 4003.

L14. Profesor Rodolfo: Ahora entonces llegamos a 8000. Entonces Kevin, ¿cómo haces?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos de la figura 8000?

L15. Kevin: (…) [*Sunner lo mira y frota los lápices mientras piensa la respuesta*].

L16. Profesor Rodolfo: No, no importa que no me multipliques pero dime ¿cómo lo haces?, dime el procedimiento.

L17. Kevin: (…) eh (…) que (…).

L18. Profesor Rodolfo: Porque, ¿qué tal que el número sea grandísimo?, bueno 8000 es grande. Bueno, pero ¿cómo haces para la figura 8000?, explica el procedimiento nada más, no importan los cálculos.

L19. Kevin: (…) toca multiplicar por 2.

L20. Profesor Rodolfo: Sí.

L21. Kevin: Y a lo que multiplico toca sumarle 3.

L22. Profesor Rodolfo: ¿Y por qué le sumamos 3?, yo estoy intrigado con ese 3, ¿por qué hay que sumarle 3?

L23. Kevin: Porque (…) [*Luis Felipe interrumpe a Kevin y responde*].

L24. Luis Felipe: Porque siempre le vamos a sumar acá, la torre [*Luis acude a señalar la figura No. 2 con dos dedos de su mano derecha haciendo énfasis en el lugar de la torre*].

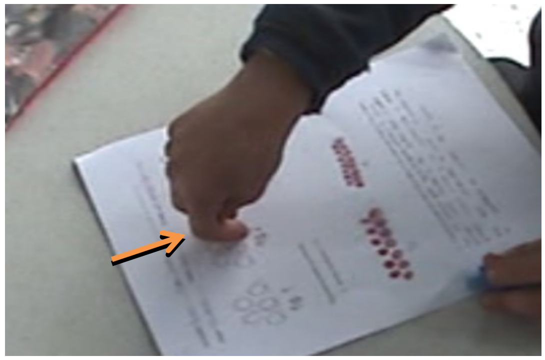


Figura 37. Luis Felipe moviliza el gesto de señalar la torre como apoyo para responder el número de círculos de la figura 8000

Luis Felipe interviene apoyando la respuesta de Kevin y justificando la suma del tres (esto es, los tres círculos que conforman la torre). Es más, este estudiante reconoce que el hecho de multiplicar por dos, tal y como lo declara Kevin (L19), emerge luego de separar la torre. Observemos que en su declaración en L24 "*siempre le vamos a sumar acá, la torre"*, el deíctico temporal *"siempre"* sugiere el reconocimiento y uso del recurso semiótico, es decir, que esos tres círculos se deben sumar independientemente cuál sea la figura particular. El adverbio *"siempre"* evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, es decir, funciones que hacen que sea posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se pueden llevar a cabo en una forma reiterativa, imaginada (Radford, 2003). "Son expresiones lingüísticas *ad hoc* que transmiten la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones" (Radford, 2003, p. 49). Por su parte a través del deíctico espacial *"acá"* Luis Felipe concentra la mirada en el lugar en el cual debe situarse la torre. Podemos afirmar que el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar una fórmula en acción. Esto sugiere pensar en la manera como los estudiantes usan el lenguaje natural o, más específicamente, ciertos elementos de este lenguaje (deícticos espaciales y temporales, por ejemplo) que indudablemente quedan muy implícitos en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica (con signos alfanuméricos).

El diálogo en este grupo prosigue poniendo como ejemplos otras figuras remotas.

L25. Profesor Rodolfo: Jimmy la figura 80.000, ¿imposible de dibujar cierto? [*El profesor Rodolfo mira a Jimmy y Jimmy mueve la cabeza de manera afirmativa*], la figura 80.000, explícame el procedimiento para hallar el número de círculos de la figura 80.000.

L26. Jimmy: (…) ish, le sumo, le sumo otros 80.000, que daría 160.000.

L27. Profesor Rodolfo: Bueno, 160.000, sí y luego (…).

L28. Jimmy: Serían 160.000, luego le sumo 3.

En síntesis, el diálogo, como parte de la labor conjunta o actividad, sugiere que los estudiantes no sólo han tomado conciencia de la característica común sino que la han generalizado, es decir han propuesto una abducción, la cual se aplica a los términos subsecuentes de la secuencia. Esto les permite encontrar el número de círculos de figuras grandes o remotas. En L21, Kevin dice *"y a lo que multiplico toca sumarle 3",* refiriéndose a una figura "grande" particular. En L22, el profesor Rodolfo inquiere sobre la suma del *3*, ante lo cual Luis Felipe responde, en L24, apoyándose en la torre como recurso semiótico que emerge condicionando su actividad semiótica y su proceso cognitivo. En una especie de plasticidad semiótica (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013, p. 82), Luis Felipe usa la torre y ésta de alguna manera influencia, modifica, incluso modela su mente. Observemos cómo a partir de la figura 2, él observa que aislando este recurso semiótico le quedan dos círculos arriba y dos abajo. Esto le permite responder adecuadamente en relación con el número de figuras remotas. En L26 y L28 Jimmy procede inicialmente de manera aditiva a través de sus determinaciones sensibles cuando percibe la secuencia y luego suma tres (es decir, los tres círculos de la torre que identificó Luis Felipe).

Del análisis de estas producciones es posible afirmar que hay generalización algebraica Factual en el sentido que le confiere Radford (2003, 2008b, 2013b). En efecto, la abducción o generalización de la característica común extraída del trabajo sensible sobre las figuras 1 a 4 (en el caso de la Tarea 1) y 1 a 3 (para el caso de la Tarea 2) es usada analíticamente. En otras palabras, la abducción, convertida en hipótesis, es aplicada para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier figura particular. Esto tiene razón de ser debido a la estructura de nuestro Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$**)**. El tipo de preguntas o requerimientos que hacemos junto con la actividad desplegada influyen en el hecho de que la hipótesis sea aplicada. Por supuesto dicha hipótesis o principio asumido descansa sobre una generalización de acciones numéricas y en la forma de un esquema numérico.

A esta altura de la entrevista, el profesor Rodolfo inquiere a los estudiantes sobre lo que piensan es una figura cualquiera. Queríamos indagar más íntimamente los significados que le conferían al término cualquiera. Recordemos que sus producciones hasta este momento del trabajo son ejemplos de instanciaciones del pensamiento algebraico Factual el cual aparece como consecuencia de la actividad desplegada.

L29. Profesor Rodolfo: Bueno ahora, ahora yo les digo lo siguiente, para todos, para todos, aquí, mírenme acá, estoy hablando de la figura 1000, estoy hablando de la figura 2000, he hablado de la figura 8000, y he exagerado mucho y he hablado de la figura 80000, ustedes han respondido muy bien, y si yo les pregunto a ustedes, si me atrevo a preguntarles a ustedes, bueno eh, ya no es la figura ni 1000, ni 2000, ni 8000, ni 80000, sino que es (…) una figura una figura cualquiera, una figura cualquiera, cualquiera puede ser 1000, puede ser 2000, puede ser 8000, puede ser 80000, una figura cualquiera, si porque yo también les puedo preguntar la figura 3.458.678 y si yo les pregunto no esa figura sino, bueno y cuántos círculos tiene la figura 80.425.700 (…) y yo exagero, entonces si la figura es una figura cualquiera, cualquier figura, cómo ¿cómo harías tú Jimmy?
L30. Jimmy: ¿Cualquier figura?
L31. Profesor Rodolfo: Sí, ¿si fuera cualquier figura?
L32. Luis Felipe: ¿La que uno escogiera?
L33. Profesor Rodolfo: La que quieras.
L34. Jimmy: La 10.000.
L35. Profesor Rodolfo: La 10.000 por ejemplo, para cualquier figura él tomo la 10.000, pero ya sabes el procedimiento, entonces ese 10.000, ¿qué es lo que haces con ese 10.000?
L36. Jimmy: Le sumo otros 10.000.

L37. Profesor Rodolfo: Le suma otros 10.000 y al resultado (…).

L38. Jimmy: Le sumo 3.

L39. Profesor Rodolfo: Le suma 3, (…) eh para ti ¿qué es una figura cualquiera?, Kevin.

L40. Kevin: Que le puede (…) sumar, restar.

L41. Profesor Rodolfo: Sí pero de éstas, por ejemplo cuando yo le pregunté a Luis Felipe una figura cualquiera él me dijo, pues para mí una figura (…) para Jimmy una figura cualquiera puede ser la 10.000, para ti una figura cualquiera, para ti una figura cualquiera, ¿cuál puede ser?

L42. Yaneth: (…) [*Mira hacia arriba y Sunner baja la cabeza y le dice en voz baja el 30.000*] la 30.000.

L43. Profesor Rodolfo: Por ejemplo, para Yaneth una figura cualquiera puede ser la 30.000, pero ¿una figura cualquiera puede ser la 5?

L44. Yaneth: [*llevándose un dedo a la boca*] no.

L45. Kevin y Yaneth: ¡Sí!

L46. Profesor Rodolfo: Jimmy dice que no, que una figura cualquiera no puede ser la número 5, ¿por qué no Jimmy o sí?, ¿quién dijo no?, ¿tú por qué dices que sí Kevin?, una figura cualquiera puede ser la número 5.

L47. Kevin: Porque es igual que la 5 sino que… es igual… le suma 5 y (…).

L48. Profesor Rodolfo: Y luego le sumamos el 3, por ejemplo Sunner, para ti una figura cualquiera, ¿cuál puede ser?

L49. Sunner: Ehh (…) 6.000.

L50. Profesor Rodolfo: La figura 6.000, ¿para ti Kevin?

L51. Kevin: la 40.000.

L52. Profesor Rodolfo: ¿Para ti Luis Felipe?

L53. Luis Felipe: 11.000 [levantando el hombre izquierdo].

L54. Profesor Rodolfo: para ti (…).

L55. Jimmy: 80.000.

L56. Profesor Rodolfo: Para ti, otra figura cualquiera.

L57. Sunner: Ehh (…) la 50.000.

L58. Profesor Rodolfo: La 50.000, ¿para ti Yaneth?

L59. Yaneth: La 20.000 [pone los lápices en su boca].

Como se observa en esta parte del diálogo, para los estudiantes el significado de una figura cualquiera está asociado con figuras particulares. Con estas figuras ellos aplican acertadamente la comunalidad o característica común y ello les permite sin dificultades mayores encontrar el número de círculos para una figura dada particular. Es claro que la fórmula corpórea les funciona bien. El término "figura cualquiera" es, para los alumnos en general, una figura particular, la que ellos elijan, y ésta hace parte de una forma de hablar por parte de ellos, la cual está permeada por un constante flujo de sentido cargada axiológicamente (Bajtín, 1929/1992). Esta forma de lenguaje utilizada alimenta el tipo de generalizaciones que ellos pueden lograr, en este caso una generalización algebraica Factual.

Consideramos que esta forma de discurrir hace parte de su experiencia cultural. De acuerdo con Ratner (2000), dicha experiencia es un fenómeno cultural en tanto hecho social que se crea de manera colectiva y compartida. Sin embargo este pasado cultural experienciado por los alumnos puede evolucionar en tanto tengan la posibilidad de ser enfrentados a situaciones o tareas en las cuales se requiera o surja la necesidad de expresarse de otra manera sobre, en este caso, una figura cualquiera. En términos didácticos estaríamos propendiendo por hacer emerger formas de expresión a través de las cuales lo indeterminado sea nombrado, explícito, es decir, sea objeto de discurso.

En este estrato de pensamiento algebraico Factual la indeterminancia no alcanzó el nivel de la enunciación, pues se expresó en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números y procesos de generalización de acciones numéricas. En este sentido podemos señalar que en este estrato la indeterminancia quedó implícita o, a lo más, mostrada pero a partir de casos o hechos particulares de números, o encarnada en la percepción, gestos y palabras. La forma de pensamiento algebraico Factual, en tanto posibilidad o forma ideal que pre-existe en la cultura (Radford, 2012a), fue instanciada en la actividad a través de los medios semióticos de objetivación movilizados por los alumnos (gestos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras). En otras palabras, es a través de la materialidad de la actividad que esta forma de pensamiento algebraico pudo aparecer y los estudiantes pudieron tomar conciencia de ella. En otras palabras, creamos condiciones particulares de interacción entre la forma ideal y los alumnos (Radford, 2012a) evidenciadas a través de la estructura de nuestro Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$) que permitieron un desarrollo en el pensamiento matemático de los estudiantes.

La expresión semiótica tuvo lugar a través de una actividad multimodal en la que intervienen los gestos, el ritmo, la percepción y las palabras. Los estudiantes constituyeron una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje (Radford, 2013b). De manera sintética, en términos de la epistemología hegeliana, la naturaleza de los tres vectores o componentes analíticos en los que el pensamiento algebraico (en este caso Factual) encuentra sus bases, está determinada por la estructura del Particular hegeliano.

4.3.3 Tarea 3: Secuencia numérica apoyada por representación tabular. En nuestro objetivo de investigación nos propusimos explorar este tipo de secuencias, entre otras cuestiones, porque queríamos indagar por los medios semióticos de objetivación que lograran movilizar los estudiantes al enfrentar secuencias que no cuentan con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular. La secuencia que propusimos se genera a partir del término general $3n - 1$, con $n = 1,2,3, \ldots$

Una de las hipótesis que teníamos refería al hecho según el cual, al parecer, las secuencias figurales apoyadas por representación tabular movilizan formas perceptivas y gestuales en los alumnos que no parecen ser movilizadas, o al menos no con la misma intensidad, en el caso cuando se enfrentan a secuencias numéricas apoyadas por representación tabular.

2	***5***	***8***
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 38. Secuencia numérica apoyada por representación tabular presentada en la Tarea 3

De nuevo, desde nuestra estructura del Particular hegeliano, la profesora Johanna introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: En esta secuencia [*señalando en el tablero la secuencia de la Figura 38*] hice los cuadrados para poder escribirles esto [*escribe dentro de tres cuadrados dibujados en el tablero los números 2, 5 y 8*] listo. A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (…) entonces miren el término 1 es (…) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores (…) voy a repartir el material.

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna visita a varios grupos para indagar qué piensan sobre la secuencia y cómo han abordado la tarea. Esta intervención de la profesora tiene razón de ser en tanto su intención es hacer un trabajo conjunto para llevar a los alumnos a tomar conciencia de la relación numérica como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérica de la secuencia.

En un grupo en particular se encuentra Yaneth quien en su producción evidencia que ha identificado una regularidad a partir de su actividad perceptual sobre los tres primeros términos dados.

L8. Profesora Johanna: A ver yo quiero saber, a ver yo quiero saber qué tanto hablan, a ver cuéntame.

L9. Yaneth: Es que estamos averiguando cómo es que se (…) cómo (…) cómo se saca esta secuencia.

L10. Profesora Johanna: A ver ¿cómo?

L11. Yaneth: Entonces yo entiendo así que este (…) este [*apunta con el lápiz el Término 1 que corresponde al número 2*] le ponen 1 y si sumamos estos, estos (…) el 1 y el 2 quedan 3, y lo ponemos acá este 2 lo pasamos acá y le ponemos 3 queda 5 [*señala con su lápiz el número 5 correspondiente al Término 2*].

L12. Profesora Johanna: ¡5! ¡Ah bien! y ¿entonces?, ¿cómo sigo?

L13. Yaneth: Bueno, entonces el (…) el 5 se pasa para el 8 [*toma el lápiz y señala el término 2 y luego el término 3*] entonces a 3 le pongo 5 y me quedan (…).

L14. Estudiantes en coro: ¡8!

La profesora Johanna aborda a otra estudiante de este grupo (Sunner) para indagar sobre su producción en relación con el primer ítem de esta tarea, "¿C*uáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6. Explica":*

L15. Sunner: es: "11, Término 4; 14 Término 5; 17 Término 6, porque uno aumenta 3"

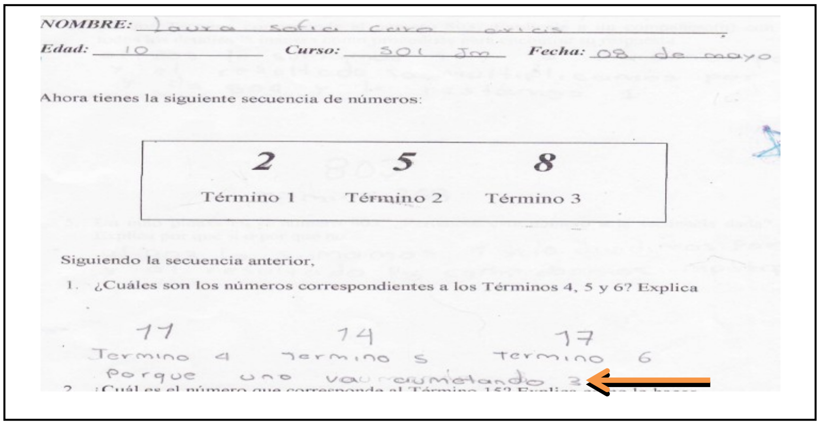
L16. Profesora Johanna: ¿Por qué?

L17. Sunner: Porque mire, 2 [*señala el Término 1*] más 3 son 5 [*señala el Término 2*] ¿sí? 5 aquí da 5 ¿sí? 5 más 3 son 8, sumándole 3.

L18. Profesora Johanna: Y entonces el cuarto término, ¿cuál sería?

L19. Sunner: 11.

Los estudiantes notaron sin mayores dificultades que los términos aumentaban en 3 (como se aprecia en L15: "*…porque uno aumenta 3*"), y utilizaron este incremento para calcular los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6. En L17 Sunner reafirma la identificación de esta característica común (*"sumándole 3"*), y frente al requerimiento de la profesora Johanna (L18) esta estudiante responde correctamente, lo cual sugiere que la comunalidad identificada le funciona para algunos términos particulares. Otra de las respuestas representativas se muestra en la producción de Laura Sofía en la Figura 39, *"porque uno va aumentando 3"*, lo cual sugiere su reconocimiento del patrón. La comunalidad, es decir aquello en virtud de lo cual los elementos se mantienen juntos, en este caso la relación entre los términos de la secuencia, ha sido identificada por Laura Sofía.


NOMBRE: laura sofia

Edad: 10 Curso: 501 Jm Fecha: 08 de mayo

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

2	5	8
Término 1	Término 2	Término 3

Siguiendo la secuencia anterior,

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Explica

11 Termino 4 14 Termino 5 17 Termino 6

porque uno va aumentando 3

Figura 39. Reconocimiento del patrón por parte de Laura Sofía en la secuencia investigada

La abducción aquí es utilizada para pasar de un término al otro (como en L15: "…*porque uno aumenta 3*"). Por el momento, no hay deducción de una expresión directa que permita calcular el número en cualquier término de la secuencia o al menos el de un término particular. Esta abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión o regla directa, es decir, una fórmula, por lo que no hay generalización algebraica. En este caso tenemos una generalización aritmética.

En el siguiente diálogo la profesora Johanna reconoce, mediante una expresión de admiración *(¡Uyy! a todos nos dio igual*), haciendo hincapié en el trabajo de Laura Sofía, que las respuestas dadas a los Términos 4, 5 y 6 son acertadas. Procede a indagar por qué a todos los integrantes del grupo les dio la misma respuesta y solicita a Luis Felipe explicar cómo lo hizo.

L20. Profesora Johanna: Laura dice término número 4, 11, término número 5, 14, 14 [*señala en cada hoja de trabajo de los niños del grupo el término 5*], término número 6, 17. ¡Uyy! a todos nos dio ¿Por qué a todos le dio lo mismo?, ¿quién me explica?, ¿cómo lo hiciste?, a ver (…) ¿tú Luis?, a ver explícame.

L21. Luis Felipe: Por ejemplo, como esta es la figura 4, ¿no? [*señala el Término 4 con el esfero*].

L22. Profesora Johanna: Sí (…).

L23. Luis Felipe: Este 4 lo multiplico por 2.

L24. Profesora Johanna: Y bueno (…) y ¿qué pasa?, lo multiplicas por 2 y ¿qué?

L25. Luis Felipe: Y (…) el resultado que me dio le quito 1 (…) y le sumo cua (…) 4 más y ese es el resultado [*al respaldo de su hoja de trabajo aparecen las siguientes operaciones: 4x2 = 8-1 = 7+4 = 11*].

L26. Profesora Johanna: Y ¿ese es el resultado?

L27. Luis Felipe: Es 11.

L28. Profesora Johanna: Y ¿cómo obtuviste este 14? [*señala con su mano la respuesta del término 5 proporcionada por el estudiante*].

L29. Luis Felipe: Igual [*al respaldo de su hoja de trabajo él va efectuando, a medida que habla, las siguientes operaciones: 5x2 = 10-1 = 9+5 = 14*].

Las operaciones aritméticas que realiza Luis Felipe (observadas en las líneas L25 y L29) pretenden justificar sus respuestas en relación con los requerimientos de la tarea que hace la profesora Johanna. No tenemos evidencias para concluir que la estrategia llevada a cabo por este estudiante es de ensayo-error, pues lo más que podríamos decir es que su estrategia funcionó en el primer intento, si fue esto lo que efectuó. El trabajo llevado a cabo por Luis Felipe busca establecer ciertas relaciones entre los números de los términos y los números correspondientes o imágenes.

En la Figura 40 observamos la producción de Luis Felipe con respecto a los ítems 2 y 3. Su expresión en el ítem 2: *"44 porque al 15 le sumo otro 15 al resultado que me da le resto 1 y ase* [ese] *resultado le sumo 15",* y la del ítem 3 parte inferior izquierda: *"a el 100 le sumo otros 100 y el resultado que nos da le resto 1 y ase [ese] resultado le sumo 100"* sugieren que Luis Felipe logra una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional el cual permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos (Radford, 2003). Es interesante aquí notar que si bien este estudiante había comenzado con un procedimiento en el cual la abducción analítica o hipótesis no era clara, al parecer el esquema operacional adquiere mayor consolidación.

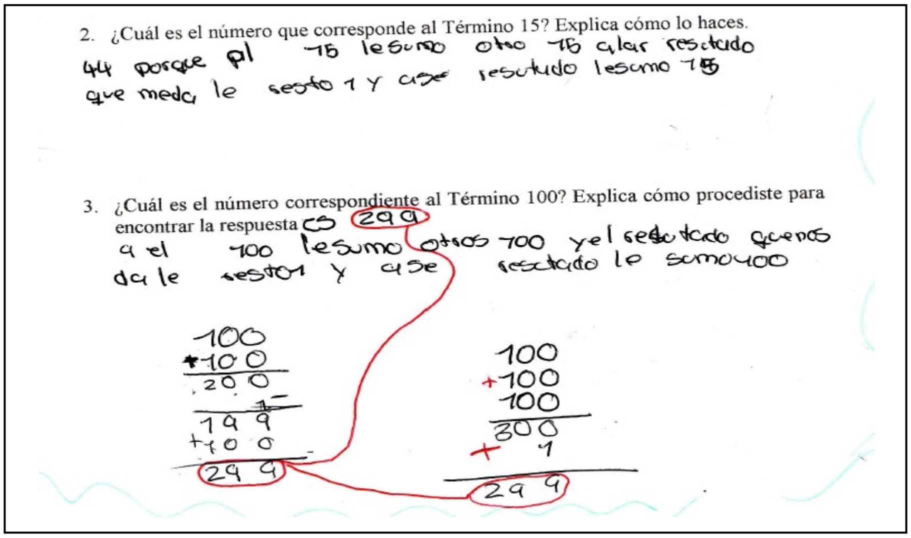


Figura 40. Producción de Luis Felipe sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

L30. Profesor Rodolfo: La pregunta es: "¿cuál es el término correspondiente al Término 100?", ¿cómo lo hiciste?

L31. Luis Felipe: Pues al 100 (…) lo multiplico por 2, y le sumo otros 100 (…) que es lo mismo (…) ¿no?, y a ese resultado que me da (…) le resto 1.

L32. Profesor Rodolfo: Y ¿por qué le sumas otra vez 100?

L33. Luis Felipe: Porque siempre acá pasa, por ejemplo, en la figura (…) 1 [señala el Término 1 con el esfero].

L34. Profesor Rodolfo: Sí.

L35. Luis Felipe: Al 1 (…) le tengo que sumar (…) eh (…) a la 2 mejor, que es que esta no sé explicarla [*señala el Término número 2 con el esfero*]. Al 2 le tengo que sumar otros 2 ¿no?, entonces al resultado que me da, le quito 1, quedó el 3 [*señala el número*] (…) me queda convertido en 3, y a ese 3 (…) le quito (…) y a ese 3 (…) ¿qué? (…) y a ese 3 le sumo otros 2 y ese es el resultado (…) en todas, hasta en la 8 mira; al 3 [señala el Término 3 con el esfero], le sumo otros 3 (…) y al resultado que me da, le quito 1[*señala con el esfero el número que está al lado de la palabra "Término", en el término 3*], y le sumo otros 3, le resto 1 y le sumo otros 3, y me da 8 [*traza una circunferencia con el esfero levantado, es decir, en el aire, alrededor del número ocho, del Término 3*] (…) siempre va a ser esa (…) un ejemplo (…) al 100 le sumo otros (…) o lo multiplico por 2 o le sumo otros 100.

L36. Profesor Rodolfo: Bueno entonces, si lo sumas, le sumas otros 100, te dio 200.

L37. Luis Felipe: Como si lo multiplicara por 2.

L38. Profesor Rodolfo: Y luego al 200 le restas 1, ¿por qué le restas 1 Luis?

L39. Luis Felipe: [*Luis indica con el esfero la operación que realizó para la respuesta del punto 3 del taller*] porque (…) o también uno no lo podría hacer así sino (…) le pondría así [*hace el movimiento de repisar la operación que hizo en el aire*], no le restaría 1, sino que le pusiera el 99 más, le sumaría 99 más.

L40. Profesor Rodolfo: Y ¿por qué lo haces así? [*Luis no brinda una respuesta transcurridos tres segundos*] porque aquí (…) aquí (…) este 100 [*señala el 100 de la operación con su índice derecho*] (…) como la pregunta es "¿cuál es el número correspondiente al Término 100? [*sigue la lectura de la pregunta con el dedo índice derecho*]" tú coges el 100, y le sumas otros 100.

L41. Luis Felipe: Sí (…) porque al término le sumo este mismo [*indica el término con el esfero*].

L42. Profesor Rodolfo: ¿Por qué?, ¿por qué le sumas el mismo?

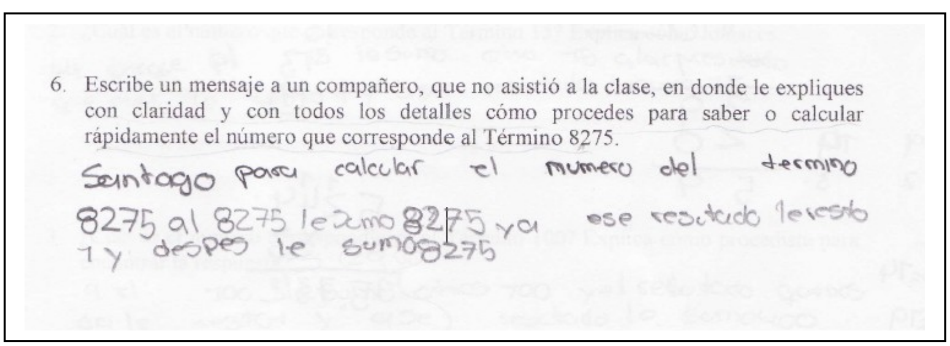
L43. Luis Felipe: ¡Porque en todos pasa lo mismo! [*en un tono enfático*].

Observemos cómo a partir de la línea L30 parece empezar a consolidarse una hipótesis. Aun cuando siente la necesidad de regresar a un término que está dentro de su campo perceptivo (en L35 *"…Al 2 le tengo que sumar otros 2 ¿no?, entonces al resultado que me da, le quito 1, quedó el 3 [señala el número] (...) me queda convertido en 3, y a ese 3 (...) le quito (...) y a ese 3 (...) ¿qué? (...) y a ese 3 le sumo otros 2 y ese es el resultado"*) para responder a la pregunta del profesor Rodolfo, ¿por qué le sumas otra vez 100?, el esquema operacional le permite abordar prácticamente cualquier caso particular con éxito. Luis Felipe en L35 declara que "*siempre va a ser esa (...) un ejemplo (...) al 100 le sumo otros (...) o lo multiplico por 2 o le sumo otros 100",* para referirse a una manera de ver que al término se le suma el mismo término. El adverbio *"siempre"* incluido en su declaración hace destacar funciones generativas del lenguaje, esto es, ciertas funciones que hacen posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se llevan a cabo de una forma reiterativa e imaginada. Son expresiones lingüísticas ad hoc que sugieren la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones. Frente a la insistencia del profesor Rodolfo en L42, *"¿por qué le sumas el mismo?"* para referirse al hecho que tú toma el 100 y le suma otro 100, Luis Felipe en L43 responde en tono enfático, *"¡Porque en todos pasa lo mismo!"*

Luis Felipe efectúa una generalización algebraica Factual. Esto es, una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos y gestos como señalamientos o apuntamientos, lo cual le permitió ir más allá de los tres primeros términos y hacer evidente un patrón para determinar el número de cualquier término específico (por ejemplo, el 15 o el 100).

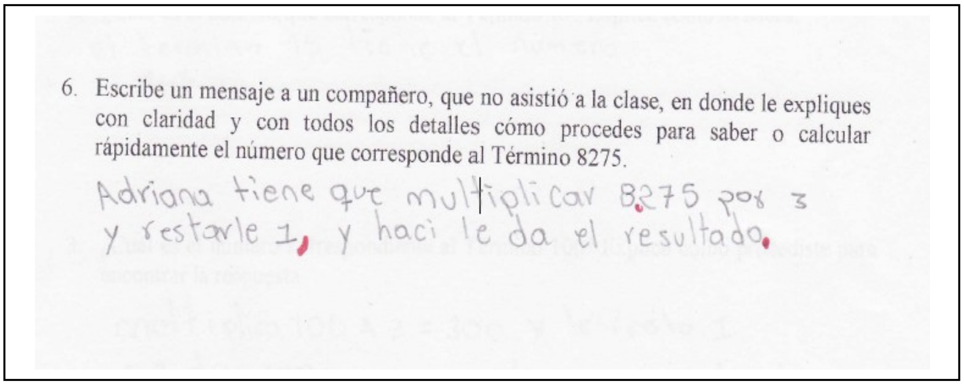
El análisis de la evidencia sugiere que la actividad semiótica en este contexto numérico no invita a pensar la indeterminancia de manera analítica (es decir, en el sentido de Viète). Aun cuando tenemos evidencia de una cierta indeterminancia, instanciada en acciones concretas, pues se debe hallar algo (el número correspondiente al Término 100, por ejemplo), ésta debe volverse explícita y hay necesidad de nombrarla, volverla objeto de discurso, esto es, transformarse en una indeterminancia analítica o algebraica.

Esta indeterminancia intuida es también instanciada a través de las producciones de Luis Felipe, Jennifer, Jimmy Stiven y Laura Sofía, con matices distintos, cuando responden al item 6 de esta tarea: *"Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275"*.


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Sentogo para calcular el numero del termino 8275 al 8275 le sumo 8275 ya ese resultado le resto 1 y despes le sumo 8275

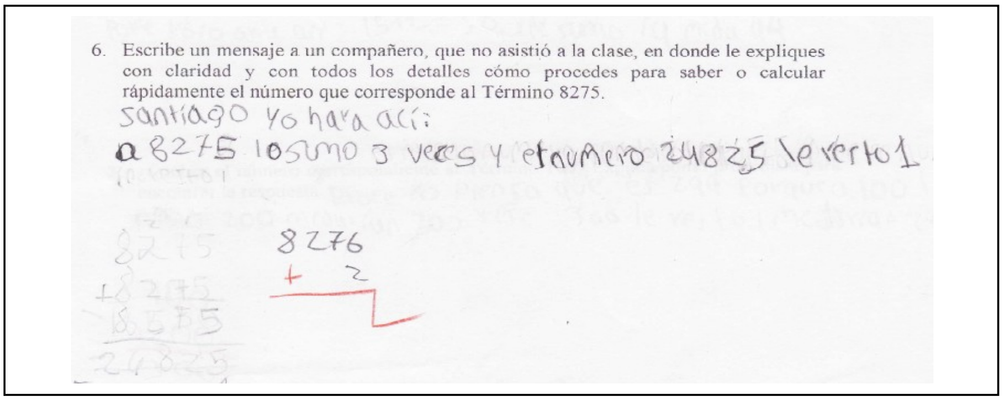
Figura 41. Producción de Luis Felipe, item 6, Tarea 3



6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Adriana tiene que multiplicar 8275 por 3 y restarle 1, y haci le da el resultado.

Figura 42. Producción de Jennifer, ítem 6, Tarea 3

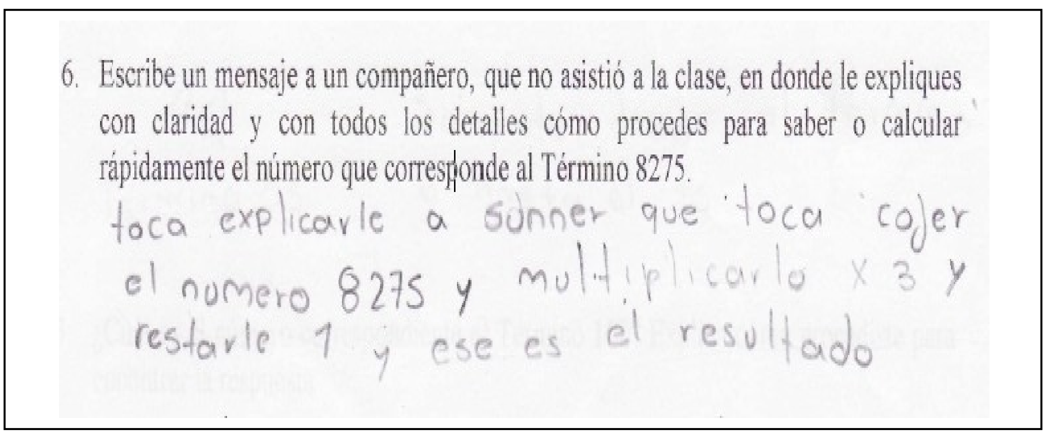


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

santiago yo hara ací:

a 8275 lo sumo 3 veces y el numero 24825 le resto 1

Figura 43. Producción de Jimmy Stiven, ítem 6, Tarea 3



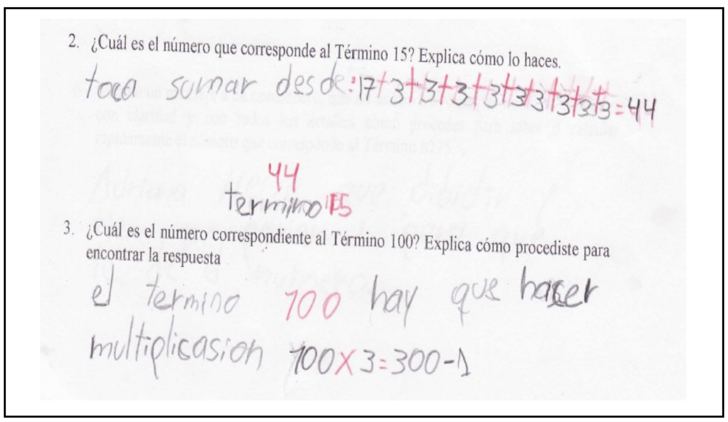
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

toca explicarle a sunner que toca cojer el numero 8275 y multiplicarlo x 3 y restarle 1 y ese es el resultado

Figura 44. Producción de Laura Sofía, ítem 6, Tarea 3

En síntesis, las producciones de estos estudiantes con respecto al ítem 6 de la tarea en cuestión, aunque con matices distintos, evidencian que a través de sus procedimientos, al igual que el de Luis Felipe, el esquema operacional forjado por este último es acogido por sus demás compañeros. Esto les permite abordar prácticamente cualquier caso particular con éxito, como en el caso del Término 8275. El contenido del ítem 6, esto es, el requerimiento, parece obligar a los estudiantes a movilizar otros medios semióticos de objetivación como recursos lingüísticos, los cuales aún quedan atrapados en el esquema operacional que ha emergido a través de una generalización de acciones.

Yaneth, por su parte, instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2) (Figura 45, parte superior). Su producción con respecto al ítem 2, *“toca sumar desde:* $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$”, sugiere que el número 9 obtenido por la diferencia entre el Término 15 y el Término 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.


2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.

toca sumar desde: 17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44

44

termino 15

3. ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta

el termino 100 hay que haser

multiplicasion 100X3=300-1

Figura 45. Producción de Yaneth sobre los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

La característica común identificada por Yaneth (aumentar 3) a partir de su respuesta al ítem 2 es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al Término 15. Esta abducción (generalización de la característica común) es utilizada como simple posibilidad, es decir algo que es solamente plausible (Radford, 2013b). La evidencia de su producción sugiere que la abducción no es utilizada de manera analítica. Más específicamente, Yaneth parece recurrir a una generalización muy sofisticada que se podría simbolizar así: Se parte de un término cualquiera conocido T_a y se quiere hallar T_n. Entonces ella procede haciendo $T_a + (n - a)x3 = T_n$. De acuerdo con Radford (2008b), Yaneth efectúa una generalización aritmética. No es de naturaleza algebraica, pues la abducción no se constituye en principio asumido o hipótesis para deducir apodícticamente (Radford, 3013b) una fórmula que le proporcione el número correspondiente a cualquier término de la secuencia numérica. Esto es, la abducción no es todavía analítica. En este momento de la actividad la ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales) parece provocar un trabajo de generalización por parte de Yaneth basado en relaciones entre números. Esto sugiere pensar que no existe tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica). El contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. La descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos sin distinguir entre éstas.

Sin embargo, en relación con el ítem 3 Yaneth parece poner en marcha el esquema operacional puesto en funcionamiento por los anteriores compañeros. Las formas de pensar y de producción del saber de nuestros alumnos necesariamente están vinculados con las formas culturales e históricas de interacción humana y cooperación, esto es, la normatividad y reglamentación entre individuos (Marx & Engels, 1970, citados por Radford, 2000a). Ella expresa que: "*el término 100 hay que hacer multplicasion 100x3 = 300 - 1"*. Claramente se observa una interpretación del signo igual como operador, sin embargo lo que nos interesa resaltar aquí es que en la expresión "*100x3 = 300 – 1",* Yaneth ha logrado concretar una generalización de acciones.

Queremos llamar la atención aquí sobre dos aspectos que nos parecen relevantes. En primer lugar, el análisis de las estrategias de generalización de los estudiantes en la secuencia numérica con apoyo tabular sugiere que la estructura del Particular hegeliano (relaciones $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$) juega un papel importante en el tipo de generalizaciones que puedan efectuar los estudiantes. Inicialmente al parecer nos topamos con formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico basadas en una proto-analiticidad. Insistimos que la estructura del Particular hegeliano juega un papel importante en esta relación de cercanía. Transcurrida la actividad y con los requerimientos hechos, por ejemplo *“Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275”*, parece propulsarse un tipo de generalización Factual. Desde luego la interacción entre los estudiantes sirve de elemento persuasivo para poder adquirir esquemas operacionales que han sido derivados de generalizaciones de acciones.

En segundo lugar, la discusión planteada pone de presente dos tipos de analiticidades. Vamos a llamar analiticidad *GA*, la que refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas, la cual es característica de la generalización algebraica (Radford, 2013b). Otra analiticidad, llamémosla *PA,* asociada con el carácter operatorio de lo desconocido, una de las características del pensamiento algebraico (Radford, 2010b). Desde luego este último tipo de analiticidad no ha emergido aún de manera explícita y quizás lo que estemos presenciando es una proto-analiticidad asociada más directamente con el abordaje de la secuencia numérica con apoyo tabular.

4.3.4 Tarea 4: El Problema del Mensaje. A esta altura del trabajo, durante las sesiones, queríamos que los estudiantes nombraran la indeterminancia algebraica o analítica. Desde nuestra aproximación vygotskiana, decidimos proponer el *Problema del Mensaje* para intentar lograr un desarrollo en la forma de pensamiento de los estudiantes. Más específicamente, queríamos, a través del trabajo con este problema, hacer aparecer formas más complejas de pensamiento algebraico. En términos de la epistemología hegeliana, estábamos interesados en orquestar una actividad que intentara propulsar el saber (que lo hiciera evolucionar), entendido a esta altura del trabajo, como forma de pensamiento Factual.

Para recordar, el Problema del Mensaje que propusimos tomaba como base la secuencia figural apoyada por representación tabular de la Tarea 2.

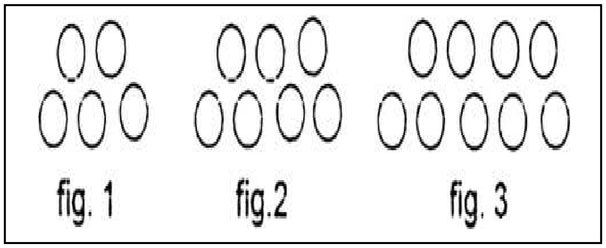


Figura 46. Secuencia figural apoyada por representación tabular que sirvió de base para plantear el Problema del Mensaje

El Problema lo planteamos en los siguientes términos:

"La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta".

Los estudiantes abordaron la tarea en forma individual y luego de unos minutos el profesor Rodolfo, en la siguiente entrevista focalizada, se reúne con un grupo para preguntarles acerca de la naturaleza del problema y sobre qué dificultades tuvieron al desarrollar la tarea, en un trabajo de acción conjunta.

L1. Profesor Rodolfo: Dígame alguno ¿cuál era como la dificultad?, ¿qué era lo que no entendían? o ¿cuál fue como realmente el problema para poder escribir el mensaje? Por ejemplo, tú Jennifer.

L2. Jennifer: La dificultad era no saber el número en la figura, porque uno ¿cómo iba a hacer el mensaje sin saber el número de la figura? [*señala una hoja en donde están dibujados algunas de las secuencias figurales de la actividad*].

L3. Profesor Rodolfo: ¿Tú quieres agregar algo Jimmy?

L4. Jimmy Stiven: Lo mismo que ella.

L5. Profesor Rodolfo: ¿Quién tiene algo distinto?, ¿ese era como el problema, como la dificultad? [*La mayoría de los niños asienten con la cabeza*]. Y aun esa dificultad, que no sabían cuál era el número, porque el número era un número desconocido, un número (…)

L6. Jimmy Stiven: Cualquiera.

L7. Profesor Rodolfo: ¿Cómo?

L8. Jimmy Stiven: Cualquiera.

L9. Profesor Rodolfo: No te escucho.

L10. Jimmy Stiven: Cualquiera.

La actividad luego se concentra en revisar específicamente la producción de Jimmy Stiven. Él explica al profesor Rodolfo y a los demás compañeros del grupo el mensaje que escribió a la profesora Estella. Es interesante aquí ver cómo una vez escribe su mensaje se remite a la secuencia, particularmente a la figura número 2, que le sirve de apoyo para hacer su explicación. En este proceso retorna a la torre como ejemplo para apoyar y afianzar su mensaje.

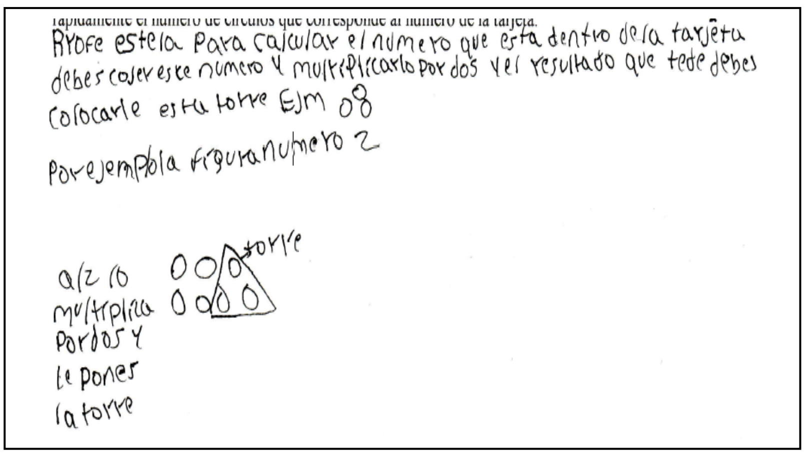


Figura 47. Producción de Jimmy sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En dicho proceso Jimmy Stiven, con sus dedos, realiza una serie de deslizamientos acompañados con acciones de tocar la figura 2 de la secuencia. Mientras que con su dedo índice de la mano izquierda señala y toca el número de la figura, con su dedo índice de la mano derecha empieza a recorrer la torre en una especie de deslizamiento oblicuo (parte superior, imágenes izquierda y derecha de la Figura 48). Observamos aquí dos gestos que moviliza Jimmy Stiven los cuales tienen roles distintos. Las imágenes izquierda y derecha de la parte inferior de la Figura 48 muestran el deslizamiento hacia abajo y luego horizontal de sus dedos para terminar de señalar la torre al mismo tiempo que con su dedo índice izquierdo señala y toca el número de la figura.

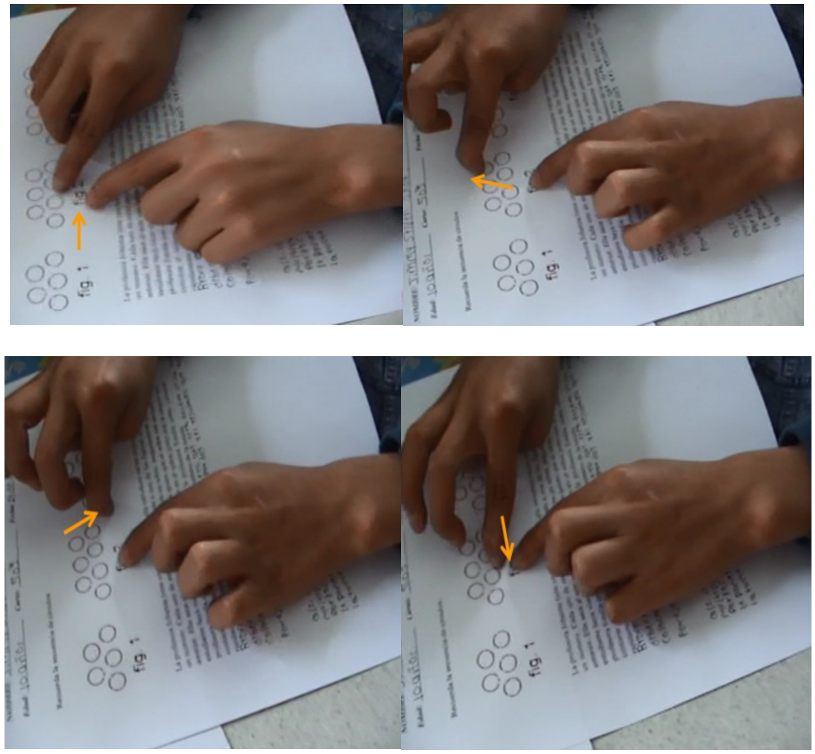


Figura 48. Secuencia de gestos (señalar y tocar) de Jimmy Stiven que le sirve de apoyo en el mensaje dirigido a la profesora Estella. Reconstrucción del video

Esta serie de gestos (deslizar y tocar) funge como apoyo a Jimmy para reafirmar el mensaje escrito a la profesora Estella. Si bien él ya elaboró un mensaje que permite calcular el número de círculos para cualquier figura a partir del término general $2n + 3$, Jimmy siente la necesidad de dar un ejemplo, el cual involucra la torre. Este proceso de señalar, tocar y deslizar combinado con palabras para explicar la manera de calcular el número de círculos de una figura cualquiera lo entendemos como una fórmula corpórea o corporeizada. Más aún, dicha acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un *nodo semiótico* (Radford, 2013b), esto es, un segmento de la actividad semiótica en la que signos pertenecientes a diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia, en este caso, de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico.

La indeterminancia, en este caso de la producción de Jimmy, está representada por la sentencia o frase *"el numero que esta dentro de la tarjeta"*. Observemos, de un lado la expresión semiótica o designación simbólica a través de un recurso lingüístico y, de otro lado, el carácter operatorio "*debes coger ese numero y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm* 

La producción de Luis Felipe, por su parte, en relación con el problema mencionado aparece en la Figura 49.

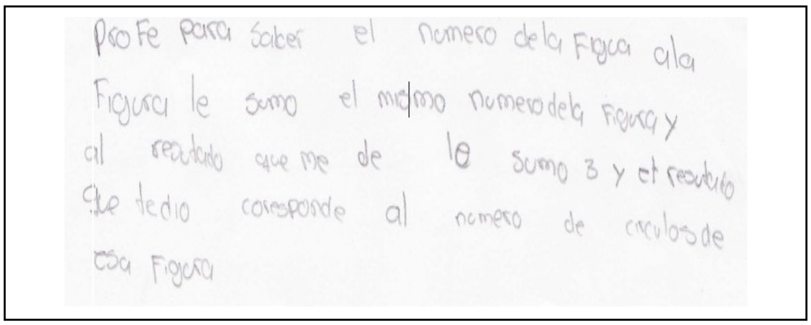

Profe para saber el numero dela Figura ala Figura le sumo el mismo numero dela Figura y al resultado que me de le sumo 3 y el resultado que tedio corresponde al numero de circulos de esa Figura

Figura 49. Producción de Luis Felipe sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En este caso, designa la indeterminancia con el término "*figura*", la cual es tratada analíticamente: *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*. La expresión semiótica de la indeterminancia en el caso de la producción de Yanteh (Figura 50) es *"el numero que le salga en la tarjeta"* y su carácter operatorio o analiticidad: *"sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"*

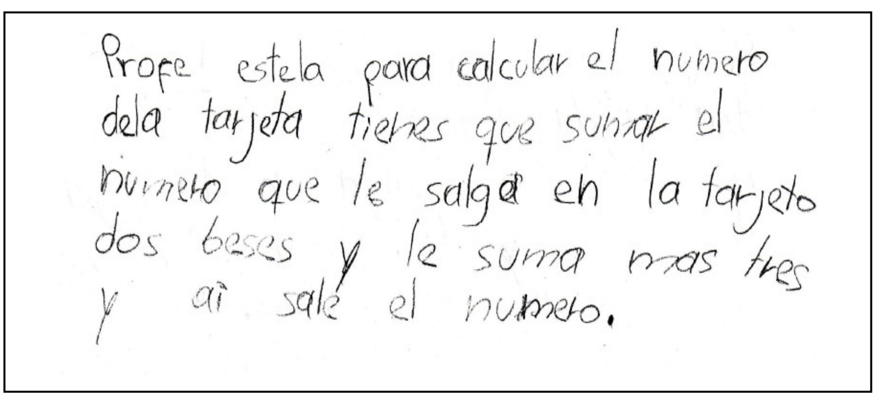

Profe estela para calcular el numero dela tarjeta tienes que sumar el numero que le salga en la tarjeto dos beses y le suma mas tres y ai sale el numero.

Figura 50. Producción de Yaneth sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En la Figura 51 presentamos el mensaje elaborado por Sunner. La expresión semiótica de la indeterminancia aquí es "*el numero que te entregaron*" y el carácter operatorio se traduce en *"el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3"*

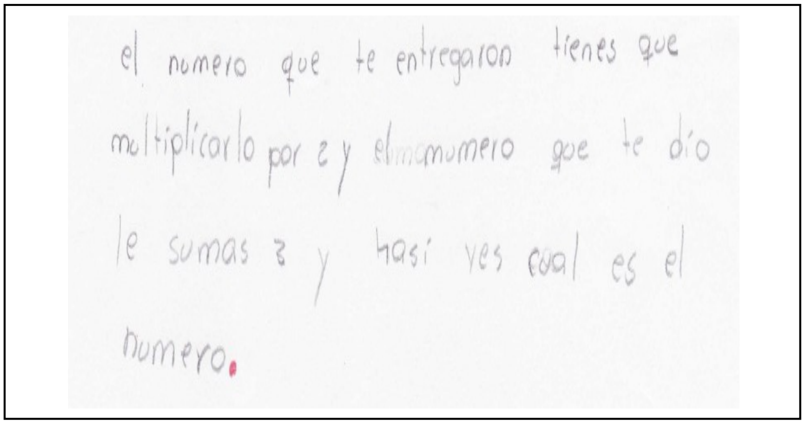

el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3 y hasí ves cual es el numero.

Figura 51. Producción de Sunner sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

La designación simbólica de la indeterminancia en el caso de la producción de Astrid (Figura 52) es *"el numero que este en la cartulina";* por su parte el carácter operatorio está declarado en la sentencia *"el numero que este en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres".*

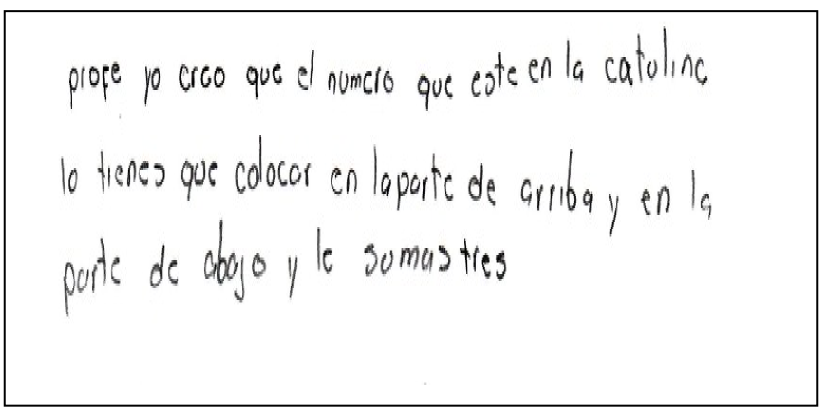

profe yo creo que el numero que este en la catulina lo tienes que colocar en laparte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres

Figura 52. Producción de Astrid sobre la Tarea 4, Problema del Mensaje

En el trabajo desarrollado en esta tarea podemos observar que el pensamiento algebraico Contextual es una posibilidad que los estudiantes instancian en la actividad. Para expresarlo de otra manera, *la actividad hace aparecer esta forma de pensamiento algebraico como* *una evolución del pensamiento algebraico Factual*. Este resultado es importante, pues el Problema del Mensaje hace posible nombrar finalmente lo indeterminado y operar con él, es decir, estamos frente a una indeterminancia analítica o algebraica.

Desde la caracterización de generalización algebraica de patrones propuesta por Radford (2013b), podemos señalar que a esta altura del trabajo los estudiantes han identificado la comunalidad o característica común que ha sido extraída del trabajo sensible sobre las figuras 1 a 3, desde la Tarea 2 (característica que conlleva a notar que, una vez separada la torre, a lo que multiplica debe sumarle 3). La abducción o generalización de esta característica o propiedad común ha sido traducida (implícitamente) en hipótesis y ésta es usada para determinar una expresión o fórmula que permite infaliblemente calcular directamente cualquier término de la secuencia. Observemos cómo el contenido del Problema del Mensaje posibilita designar la indeterminancia, volverla objeto de discurso, por ejemplo, cuando afirman $\#figurax2+3$ (Otras instanciaciones: *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé le sumo 3", "el número que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el número que te dio le sumas 3", "sumar el número que le salga en la tarjeta dos veces y le suma más tres"*). Aquí hay evidencia de una analiticidad *GA*. Hay evidencia también de un carácter operatorio de lo indeterminado, es decir, hay analiticidad *PA*.

Si aceptamos esto, parece ser que el pensamiento algebraico, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b) (indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013b). En este caso, se da la generalización algebraica y la analiticidad (*GA*) involucrada propulsa la analiticidad *PA,* instanciando una forma de pensamiento algebraico Contextual, pues la indeterminancia es analítica.

Desde nuestra perspectiva de la epistemología hegeliana, los alumnos están enactivando una forma de razonamiento y de acción que ha quedado codificada en la cultura. Aún más, en el movimiento con el que es propulsado el pensamiento algebraico Contextual (saber) por la actividad ocurren las instanciaciones, que son singulares hegelianos en movimiento ellos mismos. Los estudiantes transformaron las expresiones semióticas basadas en operaciones concretas, en números, en expresiones generales como el *"numero que está en la cartulina",* expresión que denota o nomina lo indeterminado.

En la Tabla 1 presentamos una rejilla que muestra las expresiones semióticas de las indeterminancias y sus respectivos caracteres operatorios de las producciones de los estudiantes Jimmy Stiven, Luis Felipe, Yaneth, Sunner y Astrid, como casos que consideramos representativos. Nos parece importante visibilizar estas producciones o instanciaciones del pensamiento algebraico Contextual por cuanto ponen en evidencia la potencia del Problema del Mensaje como recurso didáctico que hizo movilizar en los estudiantes esta forma de pensamiento. En la rejilla hemos puesto las sentencias o frases tal cual fueron elaboradas por los alumnos.

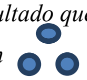
Estudiante	***Expresión semiótica de la indeterminancia***	***Analiticidad o carácter operatorio de la indeterminancia***
Jimmy Stiven	*"el numero que esta dentro de la tarjeta"*	*"debes coger ese numero y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm* 
Luis Felipe	*"figura"*	*"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*
Yaneth	*"el numero que le salga en la tarjeta"*	*"sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"*
Sunner	"*el numero que te entregaron*"	*"el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3"*
Astrid	*"el numero que este en la cartulina"*	*"el numero que este en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres"*

Tabla1. Rejilla que presenta las expresiones semióticas de la indeterminancia y su respectiva analiticidad de varios estudiantes cuando abordan el Problema del Mensaje

El trabajo desarrollado por los estudiantes a esta altura de las sesiones evidencia una reducción de recursos semióticos y a la vez una concentración del significado en relación con las secuencias. Como un caso representativo destacamos el trabajo de Luis Felipe, quien a lo largo de las sesiones ha tomado una mayor conciencia sobre las características de las secuencias, las maneras de construirlas, la forma como ha identificado la comunalidad, su abducción y luego hipótesis, entre otras. En materia de desarrollo, podemos apreciar la evolución de la unidad de componentes materiales e ideacionales del pensamiento algebraico, pues es en la materialidad de la actividad en donde Luis Felipe toma conciencia de una forma de pensamiento algebraico (en este caso Contextual). Esta materialidad se hace evidente, por ejemplo, a través de sus determinaciones sensibles (Radford, 2013b). Aún más, es a través de la actividad material que el Ideal (es decir, una forma de pensamiento algebraico Contextual) puede *aparecer* y volverse objeto de conciencia en Luis Felipe.

Estudiante	***Producción Tarea 1***	***Producción Tarea 2***	***Producción Tarea 3***	***Producción Tarea 4***
Luis Felipe	*"Que si ponemos 3 círculos abajo [con el dedo índice hace círculos hacia la izquierda] arriba encima del medio tenemos que poner 2"*	*"al mil le sumo otros mil y el resultado que da le sumo tres"*	*"a el 100 le sumo otros 100 y el resultado que nos da le resto 1 y a ese resultado le sumo 100"*	*"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3"*

Tabla 2. Proceso de objetivación contracción semiótica de Luis Felipe

En la Tarea 1 Luis Felipe tiene la necesidad de movilizar gestos indexicales espaciales para referirse a la construcción de la secuencia y a la manera como identifica la comunalidad. Si bien la secuencia de la Tarea 2 es distinta, nos interesa resaltar aquí que la coordinación de componentes externas de su pensamiento gana en refinamiento en comparación con su actividad semiótica sobre la Tarea 1. La producción con respecto a la Tarea 3 no presenta diferencias importantes comparadas con las de la Tarea 2, sin embargo su producción con respecto a la Tarea 4 es significativa.

Se evidencia un avance importante en su actividad semiótica. Esto resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos y en consecuencia un nivel más profundo de conciencia y de inteligibilidad del problema en cuestión. En síntesis, Luis Felipe ha desarrollado un proceso de contracción semiótica, esto es, un proceso genético o de desarrollo conceptual. En este proceso, él concentra el significado y al mismo tiempo, al parecer, los medios semióticos de objetivación movilizados anteriormente se subsumen en una frase como *"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo 3".*

4.3.5 Tarea 5: Secuencia puramente numérica. La secuencia que propusimos en esta tarea no contaba con el apoyo tabular. Tal y como lo señalamos en el diseño de la investigación, queríamos indagar por los medios semióticos de objetivación que pudieran movilizar los estudiantes al no contar con elementos geométrico-espaciales. Propusimos la siguiente secuencia que se genera a partir del término general $2n + 3$, con $n = 1,2,3, \ldots$

5	***7***	***9***	***11***

Figura 53. Secuencia puramente numérica presentada en la Tarea 5

En la parte inicial del trabajo los estudiantes en forma individual abordaron la secuencia y luego discutieron en pequeños grupos. La profesora Johanna circula por algunos grupos para revisar lo que contestaron a los ítems 1 y 2. En uno de estos grupos (conformado por Lorena, Luis Felipe, Adriana, Sunner y Santiago) interviene preguntándoles cómo les había ido con el trabajo.

L1. Profesora Johanna: ¿Cómo nos fue?, ¿listo? entonces vamos a mirar para las preguntas 1 y 2, listo entonces en la pregunta número 1 ¿cuál considera usted que es el primer término de la secuencia anterior?, entonces ¿quién me dice qué escribió (…)? tú sí (…) a ver Lorena ¿qué escribiste?, para ti ¿cuál es el primer término de la secuencia?

L2. Lorena: El 5.

L3. Profesora Johanna: El 5.

Los niños en su mayoría contestan que el primer término de la secuencia es 5, excepto uno que dice que el primer término de la secuencia es 3, mientras que otros estudiantes no dicen nada.

L4. Profesora Johanna: ¿Para ti?

L5. Luis Felipe: El 3.

L6. Profesora Johanna: El 3, entonces bueno acá tenemos dos respuestas, entonces vamos a escuchar primero a Lorena, Lorena, ¿por qué es el 5 para ti?

L7. Lorena: (…) [*Lorena no responde y mira a una de sus compañeras*].

L8. Profesora Johanna: ¿No sabes cuál es el primer término?

L9. Lorena: (…) [*hace una negación con la cabeza*].

L10. Profesora Johanna**:** Adriana, ¿por qué es el primer número para ti?

L11. Adriana: Porque es el más bajo.

L12. Profesora Johanna: Adriana dice que este es [*señala el número 5 en el tablero*] el primer término porque es el más bajo (…) ¿el más bajo?, ¿cómo así?

L13. Sunner: Porque el 5 es menor que los demás.

L14. Profesora Johanna: Porque el 5 es menor que los demás (…) ahora escuchemos a Luis, vamos a ponerle cuidado a la respuesta de Luis ¿listo? (…) Luis (…) ¿por qué dices que es el 3?

L15. Luis Felipe: Por ejemplo si 5 es el segundo ¿no?, esta figura ya le da a uno la secuencia ¿no?

En esta parte del diálogo se observan dos respuestas al ítem 1 de esta tarea. La primera refiere a que 5 es el primer término de la secuencia planteada porque 5 es el número menor (L11, L13). En este caso, para Sunner, por ejemplo, la idea de primer término parece estar asociada a secuencias crecientes en las que siempre hay un primer término que es el menor. Por otra parte, aparece otra respuesta (L5) que lleva implícita el cambio de la secuencia, pues para Luis Felipe el primer término no es 5, sino 3, tal y como se aprecia en la Figura 54.

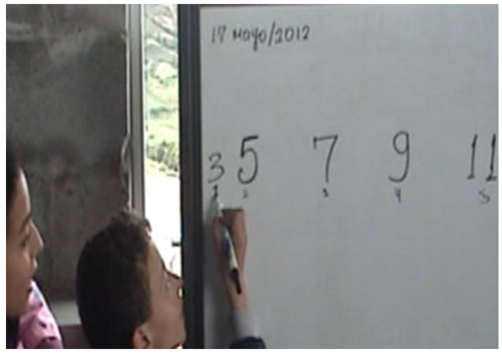


Figura 54. Luis Felipe escribiendo el primer Término de la secuencia que él propone

L16. Profesora Johanna: Bueno pero ¿qué ven?, un segundito acá [*dirigiéndose al tablero*] voltéate un segundito para que todos te puedan escuchar, miren lo que dice Luis (…) Luis dice que si el 5 (…) ¿tú dices que el 5 es el segundo término?
L17. Luis Felipe: [A*firma con la cabeza*].
L18. Profesora Johanna: ¿Por qué?
L19. Luis Felipe: Porque al 2 le sumo otros 2 y le resto 1y le sumo otra vez 2.
L20. Profesora Johanna: Y ¿por qué dices (…)? y ¿dónde ves tú el 2 en la secuencia?
L21. Luis Felipe: Debería ir acá [*señala debajo del 5 en el tablero, como indicando la posición o el número del término*].
L22. Profesora Johanna: ¿Dónde debe ir el 2?
L23. Luis Felipe: Ah aquí [*pone el dos debajo del 5*].
L24. Profesora Johanna: Y entonces, ¿dónde iría el 3?
L25. Luis Felipe: Ah aquí [*lo pone debajo del 7*].
L26. Profesora Johanna: Y entonces en los otros dos ¿qué? [*refiriéndose al 9 y al 11*].
L27. Luis Felipe: [*Pone el 4 debajo del 9 y el 5 debajo del 11*].
L28. Profesora Johanna: Bueno (…) entonces mira la pregunta para Luis y es para ustedes listo, ¿por qué este?… ¿por qué para Luis? (...) bueno (…) ¿por qué para Luis este es el segundo término y no el primero? ¿Entonces dónde estaría el primero?
L29. Luis Felipe: [*Luis pone el 3 antes del 5*].

Efectivamente Luis Felipe cambia la secuencia. No está considerando la presentada en el tablero, sino que para él la secuencia es: ***3 5 7 9 11***, en la cual su primer término es

3. Si bien no tiene dificultades para identificar la comunalidad (*"porque al 2 le sumo otros 2 y le resto 1y le sumo otra vez 2"*), la secuencia que propone es otra.

L30. Profesora Johanna: Y sería ¿3?, ¿y no puede ser éste el primero? [s*eñala el 5*].

L31. Luis Felipe: No profe.

L32. Profesora Johanna: Pero ¿por qué (…) ¿por qué no?, Esneider ¿por qué?

L33. Esneider: No (…) yo no (…).

L34. Profesora Johanna: Bueno lo que ocurre es que aquí hay una cosa.

L35. Santiago: Yo, yo, yo.

L36. Profesora Johanna: A ver Santiago, cuéntame.

L37. Santiago: El primer término no es ni, no es el, ese es el tercero, 5 es el tercero.

L38. Profesora Johanna: ¿5 es el tercero?, y entonces ¿cuál es el primero?

L39. Santiago: El primer término es 1, ahí se van sumando de a 2 (…) al 1 se le suman 2 da 3, se le vuelven a sumar 2 da 5, el primer término es 1.

L40. Profesora Johanna: Bueno miren acá lo que estamos diciendo, listo [*ella se encuentra justo frente al tablero*] lo que ocurre es lo siguiente, entonces miren; te puedes sentar [*le dice a Luis Felipe*] esta es la secuencia que yo les di: ***5 7 9 11*** listo voy a borrar estos numeritos [*borra lo que puso Luis*] ésta es la secuencia que yo les di: ***5 7 9 11*** [*señalando al tablero*] la secuencia de la que está hablando Luis es: ***3 5 7 9*** [*la anota en el tablero*] y la secuencia de la que está hablando Santiago ***1 3 5 7*** [*la anota en el tablero*] ¿qué pasa con estas secuencias?, miren (…) si ustedes miran esas secuencias, por ejemplo para obtener el 7 yo podría construir el 7 a partir del 5 [*señala el 7 en el tablero*] ¿haciendo qué?

L41. Estudiantes en coro: Sumándoles 2!

L42. Profesora Johanna: Puedo construir el 9 a partir del 7.

L43. Estudiantes en coro: Sumando 2!

L44. Profesora Johanna: En esta secuencia [*señala la secuencia de Luis*] puedo construir el 5 a partir del 3.

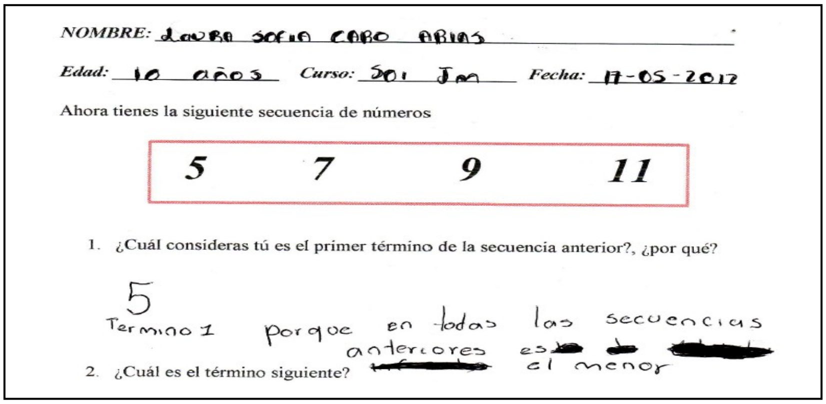
L45. Estudiantes en coro: Sumando 2 [*Santiago contesta primero*].

L46. Profesora Johanna: Y el 7 a partir del 5 listo y miren en esta tercera secuencia pasa lo mismo[*señalando la secuencia de Santiago*], entonces las tres secuencias se pueden construir sumando 2 ¿verdad?, pero tienen una diferencia y es el primer término entonces miren (…) el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia de Santiago*] para Santiago es el 1, el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia de Luis*] para Luis es el 3 y el primer término de esta secuencia [*señala la secuencia original que estaba en la guía*] para ustedes es el 5 listo entonces.

Figura 55. La profesora Johanna explica las diferencias de las tres secuencias propuestas

En la discusión con el grupo general, la profesora Johanna intenta visibilizar las diferencias de las tres secuencias (Figura 55), focalizando la atención en el hecho que las tres tienen un primer término distinto, aunque el patrón que las genera es el mismo (aumenta en 2). La secuencia propuesta por Santiago, al parecer, tiene su origen en el universo de los números naturales, el cual ha venido siendo trabajado por los estudiantes en la clase de matemáticas. Por su parte, en la secuencia que propone Luis Felipe (***3 5 7 9***), el segundo término es el *5* y no el *7*, pues para él el primer término debe ser *3*.

Algunas producciones en las hojas de trabajo dejan ver las razones por las cuales ***5*** es el primer término de la secuencia propuesta. Efectivamente para estos estudiantes el primer término siempre es el menor. La repuesta de Laura Sofía, afirmamos, reside en su experiencia cultural vivida en las sesiones anteriores. Ella afirma que el 5 es el primer término porque *"en todas las secuencias anteriores es* (el primer término) *el menor"*.



NOMBRE: Laura Sofia Cabo Arias

Edad: 10 años Curso: 501 Jm Fecha: 17-05-2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5	7	9	11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

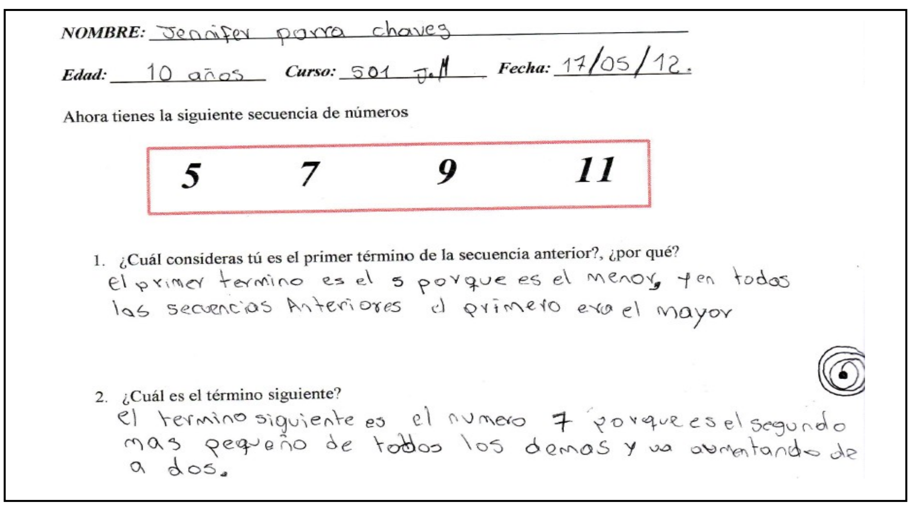
5

Termino 1 porque en todas las secuencias anteriores es [redacted] el menor

2. ¿Cuál es el término siguiente? [redacted]

Figura 56. Respuesta de Laura Sofía a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

Efectivamente, las tareas que se diseñaron en esta investigación siempre involucraron secuencias crecientes en las cuales, desde luego, el primer término es el menor de todos. Esta experiencia cultural deja huella en Laura Sofía y la razón esgrimida por ella paga tributo al trabajo sobre el tipo de secuencias abordadas. Por su parte, Jennifer reafirma lo expresado por Laura Sofía, aunque al escribirlo se equivoca.



NOMBRE: Jennifer parra chaves

Edad: 10 años Curso: 501 J.M Fecha: 17/05/12.

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5	7	9	11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?

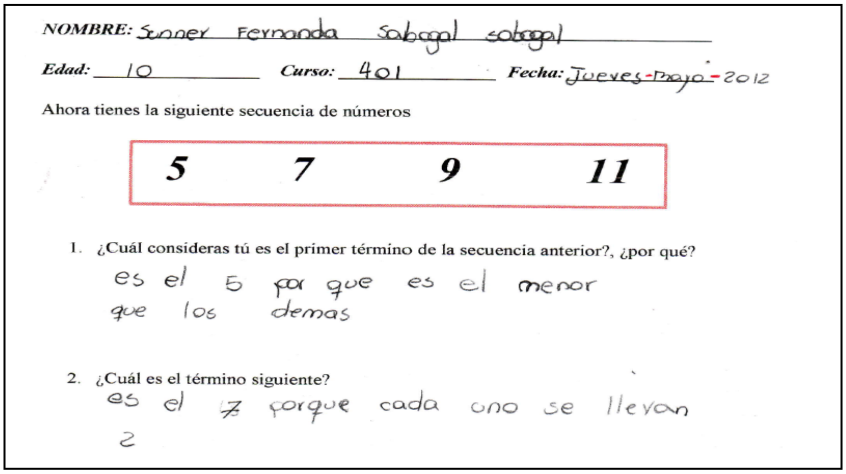
el primer termino es el 5 porque es el menor, y en todas las secuencias Anteriores el primero era el mayor

2. ¿Cuál es el término siguiente?

el termino siguiente es el numero 7 porque es el segundo mas pequeño de todos los demas y va aumentando de a dos.

Figura 57. Respuesta de Jennifer a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

Sunner también reafirma lo expresado por Jennifer y Laura Sofía. Ella ha identificado la comunalidad, evidenciada en su respuesta a l ítem 2: *"es el 7 porque cada uno se llevan 2",*



NOMBRE: Sunner Fernanda sabogal sabogal

Edad: 10 Curso: 401 Fecha: Jueves-Mayo-2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

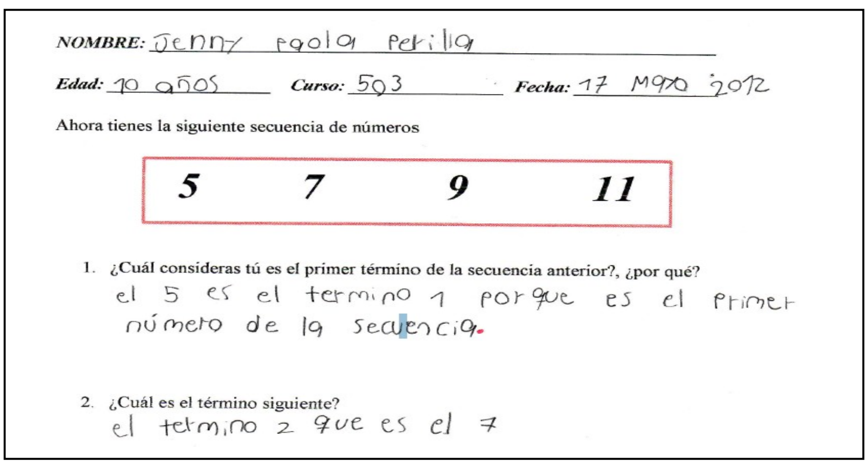
5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
es el 5 por que es el menor que los demas

2. ¿Cuál es el término siguiente?
es el 7 porque cada uno se llevan 2

Figura 58. Respuesta de Sunner a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

La producción de Jenny en relación con el ítem 1, en la Figura 59, parece coincidir con las respuestas anteriores, sin embargo su declaración, **"***el 5 es el termino 1 porque es el primer número de la secuencia",* sugiere una práctica cultural de leer de izquierda a derecha.



NOMBRE: Jenny paola perilla

Edad: 10 años Curso: 503 Fecha: 17 Mayo 2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

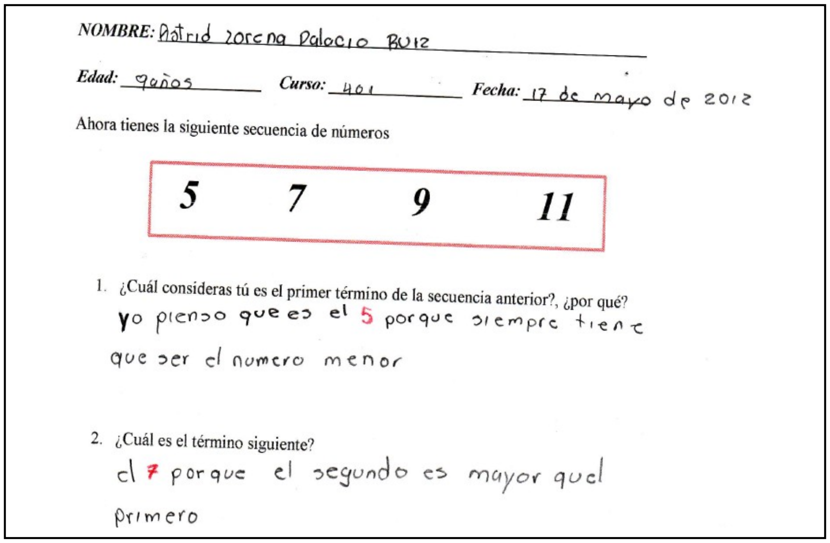
5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
el 5 es el termino 1 porque es el primer número de la secuencia.

2. ¿Cuál es el término siguiente?
el termino 2 que es el 7

Figura 59. Respuesta de Jenny a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

En la respuesta ofrecida por Astrid al ítem 1: *"yo pienso que es el 5 porque tiene que ser el número menor",* es interesante ver cómo la palabra *"tiene"* adquiere un sentido de obligatoriedad, debido posiblemente a la historia cultural de las sesiones de trabajo o más específicamente, debido a la actividad desarrollada (en tanto evento) en las sesiones anteriores.



NOMBRE: Astrid Lorena Palacio Ruiz

Edad: 9 años Curso: 401 Fecha: 17 de mayo de 2012

Ahora tienes la siguiente secuencia de números

5 7 9 11

1. ¿Cuál consideras tú es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
yo pienso que es el 5 porque siempre tiene que ser el numero menor

2. ¿Cuál es el término siguiente?
el 7 porque el segundo es mayor quel primero

Figura 60. Respuesta de Astrid a los ítems 1 y 2 de la Tarea 5

En este caso en particular, observemos que su respuesta al ítem 2, *"el 7 porque el segundo es mayor que el primero"*, parece denotar la idea de secuencia creciente. Una vez más, esto puede estar relacionado con el tipo de actividad desplegada por Astrid en sesiones anteriores. Como lo sugiere Ilyenkov (1977), el conocimiento logrado arrastra la huella de la actividad que lo media, es decir, el conocimiento o las instanciaciones de Astrid sobre la idea general de secuencia pagan tributo a la actividad. Interpretamos esta actividad como el Particular de Hegel, conformado por el diseño de las tareas y la actividad en tanto evento (Radford, 2013a).

Aunque en estos momentos podríamos aventurarnos a afirmar que, independientemente de las respuestas de los estudiantes, la mirada de las secuencias paga su tributo a una forma cultural de lectura (de izquierda a derecha), en el análisis de las producciones de los estudiantes frente a la Tarea 6 presentaremos evidencias de que es más fuerte, quizás, la idea según la cual para los estudiantes el primer término de una secuencia siempre es el número menor y no necesariamente el primero que se ubica a la izquierda.

Finalmente, la profesora Johanna a través de un trabajo conjunto lleva a los alumnos a tomar conciencia de la estructura numérica de la secuencia y deciden adoptar la representación tabular en la secuencia:

5	***7***	***9***	***11***
Término 1	***Término2***	***Término 3***	***Término 4***

Figura 61. Secuencia final acordada en el grupo de estudiantes y la profesora Johanna con apoyo tabular

El siguiente diálogo corresponde a una parte de una entrevista focalizada, en la cual pretendíamos indagar más de cerca lo que los estudiantes percibían sobre este tipo de secuencias.

L47. Profesor Rodolfo: Bueno, ¿cómo es la cosa? Dice Luis, ¿por qué no repites, Luis, lo que habías dicho?

L48. Luis Felipe: Que por ejemplo en el 7 [*el número correspondiente al Término 2*] se multiplica, el 2 multiplicado por el 3, y le sumo 1, pero acá en el término 3 no sirve, porque el 3 lo multiplico por 3 y le sumo 1 daría 10, pero entonces no serviría [*señala en el cuaderno de notas del investigador (Rodolfo) la segunda y la tercera posición de la secuencia de la Figura 62*].

L49. Profesor Rodolfo: No serviría ni para el Término 1, ni para el Término 3 ni para el Término 4. ¿Qué es lo que tú sugieres Santiago?

L50. Santiago: Que se le sumen, se le suman 3, se le pone 1 al término y los otros 2 se le ponen el número [*señala la palabra Término 1, que está escrita en la parte inferior del número 5, y luego señala el número 5 que está escrito en la parte superior*] y ahí van dando todos.

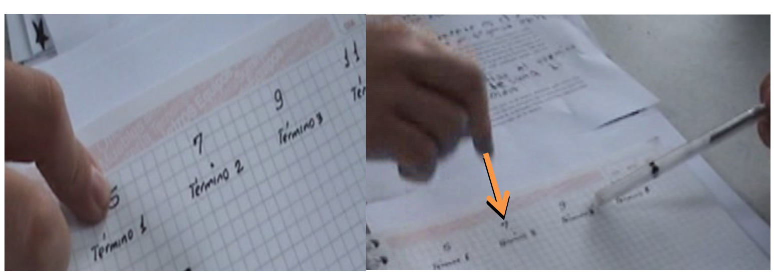


Figura 62. Secuencia de señalamiento de Santiago en la secuencia numérica con recurso tabular. A la izquierda señala el número 5 correspondiente al término 1; a la derecha señala el número 7 correspondiente al Término 2. Reconstrucción del video

L51. Profesor Rodolfo: ¿Qué es lo que se le pone al término?

L52. Santiago: Al término se le va poniendo 1, de a 1, y a los números se le van poniendo los otros 2.

L53. Profesor Rodolfo: Pero, pero tú tienes que producir son los números, tú tienes que trabajar es con los términos, pero (…).

L54. Santiago: Pero como usted dice que tiene que dar con éste y con éste [*señala los dos primeros números ubicados en la parte superior, 5 y 7*] tendría que sumársele 2 y al término dársele 1 y al resto a los (…) a los otros números.

La Figura 62 muestra dos señalamientos que hace Santiago para referirse a la manera como se van formando los términos de la secuencia. La movilización de este tipo de gestos es acompañada de palabras y de actividad perceptual. La actividad de Santiago se concentra en las relaciones entre los términos (L52) y los números correspondientes a estos términos (L54). El movimiento de sus dedos se limita a señalarlos o a apuntarlos. Santiago pone en juego una abducción ("*a los números se le van poniendo los otros 2*") que confirma cuando declara en L50 *"y ahí van dando todos",* lo cual simplemente le permite pasar de un número a otro. En este caso no hay evidencia de deducción de una fórmula que permita encontrar el número correspondiente a un término en particular o cualquier término. En este sentido, Santiago efectúa una generalización aritmética (Radford, 2013b).

Observemos cómo en la línea L48, Luis Felipe pone en funcionamiento una estrategia de ensayo-error, "*Que por ejemplo en el 7 [el número correspondiente al Término 2] se multiplica, el 2 multiplicado por el 3, y le sumo 1, pero acá en el término 3 no sirve, porque el 3 lo multiplico por 3 y le sumo 1 daría 10, pero entonces no serviría*". Se evidencia un ejercicio de adivinar la regla, la cual le funciona para el Término 2 pero no para el Término 3. La abducción aquí no resulta de inferir una comunalidad acerca de los tres primeros términos de la secuencia. La abducción es mera adivinanza. Luis Felipe realiza una inducción ingenua (Radford, 2008b).

Queremos destacar una vez más cómo las estructuras numérica y espacial fueron importantes en las Tareas 1, 2 y 4, en tanto fueron proveedoras de índices o elementos perceptivos generalizables que posibilitaron el establecimiento de relaciones entre números conocidos y desconocidos. En este sentido el trabajo algebraico que puede abordarse en el terreno fenomenológico tiene sus bases en la articulación de estas dos estructuras. En particular, el contenido del Problema del Mensaje junto con sus estructuras espacial y numérica que comporta la secuencia presentada en él sirvió de punto de referencia para efectuar la generalización algebraica (en ese caso Contextual). Observemos que aun cuando se abordó el Problema del Mensaje y produjo una evolución de la forma de pensamiento algebraico, al trabajar posteriormente con la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), se regresa de nuevo a producciones por parte de los estudiantes que evidencian generalizaciones aritméticas y más aún, emergen estrategias de ensayo-error que terminan en meras adivinanzas o inducciones ingenuas.

4.3.6 Tarea 6: Secuencia puramente figural. En relación con esta tarea ya había un antecedente con la Tarea 5 en la que los estudiantes y la profesora Johanna discutieron sobre cuál era el primero y segundo términos de esa secuencia (secuencia puramente numérica). Esta experiencia ganada fue puesta en marcha al abordar esta tarea (cuyo término general es $2n+1$, con $n=1,2,3,\ldots$) por lo que no se presentaron dificultades en relación con establecer cuál era la primera figura, cuál la segunda, cuál sería la tercera y cuál la cuarta figura. Una vez establecieron el apoyo tabular, el trabajo se concentró en discutir los otros ítems.

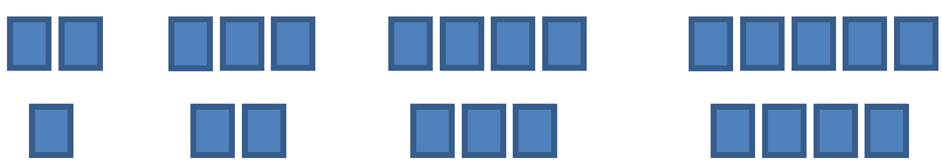


Figura 63. Secuencia propuesta en la Tarea 6

En términos generales, las producciones de los estudiantes en relación con los ítems de esta tarea tienen similares características que las producciones logradas en las tareas 1 (Secuencia figural apoyada por representación tabular (1)), 2 (secuencia figural apoyada por representación tabular (2)) y 4 (Problema del Mensaje). Nuevamente podemos señalar que la forma de pensamiento Contextual aparece aquí como posibilidad que los estudiantes instancian a través de la movilización de medios semióticos de objetivación.

El Particular de Hegel, estructurado por el diseño de las preguntas y exigencias que hacemos y la actividad propiamente como se desarrolla (evento), hace aparecer el pensamiento algebraico Contextual como una evolución del pensamiento algebraico Factual. Consideramos este hecho como un resultado importante de nuestra investigación, lo cual pone de manifiesto la idea de saber como movimiento en una especie de continuidad entre estos tipos o formas de pensamiento algebraico.

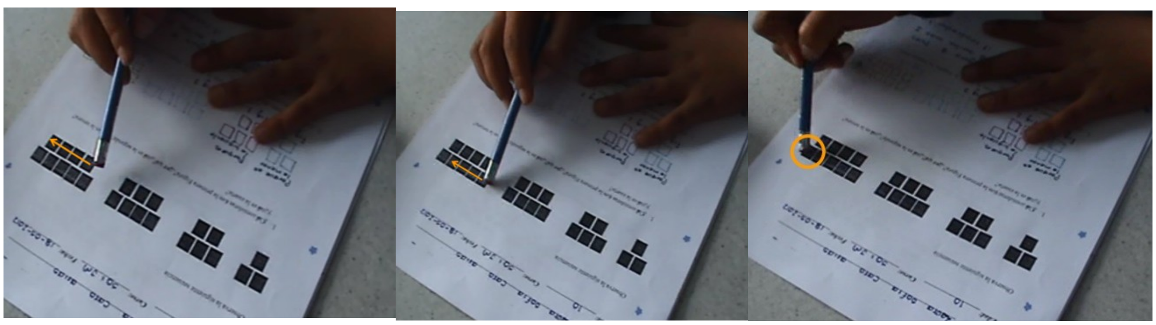


Figura 64. Secuencia de gestos (deslizamientos del lápiz) movilizados por Laura Sofía, ítem 1 Tarea 6. Reconstrucción del video

Presentamos como caso representativo el siguiente diálogo en donde intervienen el profesor Rodolfo, Laura Sofía y Jenny, discutiendo sobre la construcción de la secuencia. La Figura 64 muestra una serie de gestos (deslizamientos del lápiz) los cuales son puestos en funcionamiento por parte de Laura Sofía cuando comunica la forma como se generan las figuras.

L1. Laura Sofía: Por ejemplo en la figura 4, pones 4 abajo y 4 arriba [*señala la hilera inferior de rectángulos y después la de arriba*] más 1 [*señala el último rectángulo de la hilera superior*].

L2. Profesor Rodolfo: ¿Y por ejemplo, como sería la figura 5?

L3. Laura Sofía: 5 abajo y 5 arriba [*mientras señala las hileras*] más 1.

L4. Profesor Rodolfo: ¿Y la figura 6?

L5. Laura Sofía: 6 abajo y 6 arriba, más 1.

L6. Profesor Rodolfo: ¿Cómo será, por ejemplo, Jenny, en la figura 15?
L7. Jenny: 15 abajo y 15 arriba [*sube la mano ligeramente*] y le sumamos 1, serían 15 abajo y 16 arriba.

En relación con el ítem 5 de esta tarea, la producción de Jenny evidencia un sentido de la indeterminancia tratada analíticamente.
L8. Profesor Rodolfo: Ahora, el quinto punto ¿cómo lo resolviste tú Laura Sofía? Ábrelo para que lo vean.
L9. Laura Sofía: [*Laura lee de su guía*] profe Estella, coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1.

En este caso, la indeterminancia está determinada en la frase *"el número que está en la tarjeta"*. El carácter operatorio de esta indeterminancia o analiticidad viene dado por la frase: *"coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1"*. La producción de Jenny, por su parte, evidencia también la movilización de gestos indexicales los cuales comunican la forma como se genera, para ella, la secuencia.

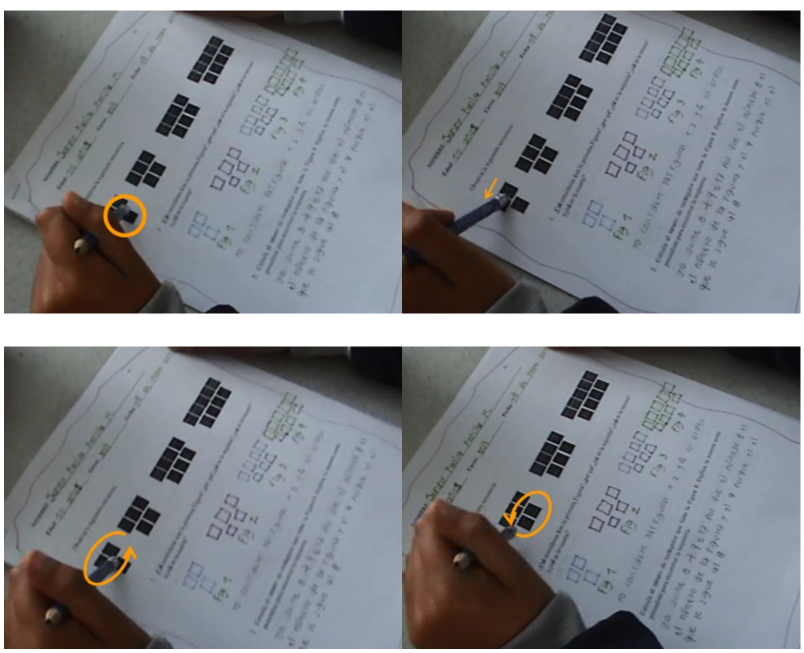


Figura 65. Secuencia de gestos indexicales por parte de Jenny al explicar la manera como se generan las figuras en la secuencia de la Tarea 6. Reconstrucción del video

L10. Jenny: La figura 1 [*la señala con el lápiz*] uno le coloca un cuadrado acá arriba [*señala el cuadrado inferior*] y como es el siguiente del 1, es el 2, entonces lo ponemos acá arriba [*señala la hilera superior de la figura*]. El 2 [*señala estos últimos dos cuadrados*], estos dos cuadrados los ponemos acá abajo [*señala la hilera inferior de la figura 2*] y el siguiente del 2 es 3 [*señala la hilera superior de la figura 2*] y cogemos así sucesivamente hasta los otros.

Se observa que la movilización de gestos indexicales (espaciales y temporales), palabras, actividad perceptual y movimiento parece ser más intenso cuando los estudiantes enfrentan secuencias que ofrecen índices geométrico-espaciales en contraste con las secuencias numéricas (con o sin apoyo tabular). Es más, cuando los estudiantes abordaron la secuencia puramente figural, en la cual luego establecieron rápidamente el recurso tabular a partir de su experiencia ganada en la tarea anterior, al menos se observa en ellos una disposición favorable para trabajar con este tipo de secuencias. En efecto, ellos pueden decir frases como: "*como es el siguiente del 1*", *"uno le coloca un cuadrado acá arriba"*, *"estos dos cuadrados los ponemos acá abajo"*, *"cogemos así sucesivamente hasta los otros"*; frases que ponen de manifiesto indexicales espaciales (por ejemplo, *el siguiente de 1, acá arriba, acá abajo*) y un indexical temporal (*así sucesivamente*).

En relación con este último aspecto, observamos, en el caso de Jenny: *"...y el siguiente del 2 es 3 y cogemos así sucesivamente hasta los otros",* cómo el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar a través de su fórmula corpórea cuestiones relacionadas con el tiempo (*así sucesivamente*), o quizás, más adelante, indagar cómo el lenguaje simbólico (podría ser una fórmula algebraica) incorpora la dimensión lingüística.

En el siguiente diálogo entre la profesora Johanna, Héctor Fabio, Adriana, el profesor Rodolfo y Yaneth, parece reafirmarse en los estudiantes la facilidad para abordar este tipo de secuencias:

L11. Profesora Johanna: ¿Tú la vez más fácil que la de los números?

L12. Héctor Fabio: ¡Claro! estamos mirándole observaciones [*se refiere a los índices geométrico-espaciales de las figuras*], y claro, es más fácil.

L13. Profesora Johanna: ¿Sí?, ¿le estás mirando observaciones, características, está más fácil?, con los números, ¿ya no puedo mirar características?

L14. Héctor Fabio: Pues eso es un poquito más difícil.

L15. Profesora Johanna: ¿Por qué te parece más fácil? [*dirigiéndose a Adriana*].

L16. Adriana: (…) [*Evidencia timidez*].

L17. Profesor Rodolfo: A Yaneth, ¿cómo le parece?, ¿más fácil o más difícil que el anterior?

L18. Yaneth: Me parece más fácil.

L19. Profesor Rodolfo: ¿Por qué?

L20. Yaneth: Porque en el anterior tocaba (…) adivinar el número, en vez de (…) [*se pone el lápiz en la boca, piensa en lo que va a decir*], no sé [*sonríe*].

L21. Profesor Rodolfo: Y con ésta [*refiriéndose a la secuencia puramente figural*] ¿qué es lo que sucede?

L22. Yaneth: (…) No sé (…) Es que todavía no la he (…).

L23. Adriana: Toca mirar cuál es la primera, la segunda [*señala con su dedo índice derecho las figuras 1 y 2*], la tercera y la cuarta.

Resaltamos en la declaración L20 de Yaneth la dificultad que ella manifiesta *"porque en el anterior tocaba (...) adivinar el número…",* trabajo que efectivamente se desplegó en la actividad con la secuencia puramente numérica. Los estudiantes tenían que establecer relaciones entre los números pues no contaban con los elementos espaciales y geométricos. Observemos cómo Adriana, quien al principio mostró cierta timidez (L16), luego responde dirigiéndose a las figuras y señalando (L23).

En el análisis que adelantamos de las producciones de los estudiantes con respecto a la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), habíamos aventurado la afirmación según la cual la mirada y lectura que hacen los estudiantes de las secuencias pagaban su tributo a una forma cultural de lectura (de izquierda a derecha). Esta situación fue objeto de más análisis. En la siguiente entrevista focalizada queríamos explorar las razones que conminaban a nuestros estudiantes a significar el primer término de las secuencias numéricas y figurales en ausencia del recurso tabular. Las evidencias que presentamos en el caso de la secuencia puramente numérica mostraban que algunos estudiantes (Luis Felipe y Santiago, por ejemplo) proponían otra secuencia; por ejemplo para Luis Felipe la secuencia tenía como primer término al 3, mientras que para Santiago el primero era el 1.

Es interesante mostrar aquí que para los estudiantes en general el primer término de estas secuencias y de las anteriores siempre es el número menor y no necesariamente el primero que se ubica a la izquierda. En el cuaderno de notas del investigador, propusimos las secuencias que se muestran e indagamos con algunos estudiantes cuál consideraban era el primer término.

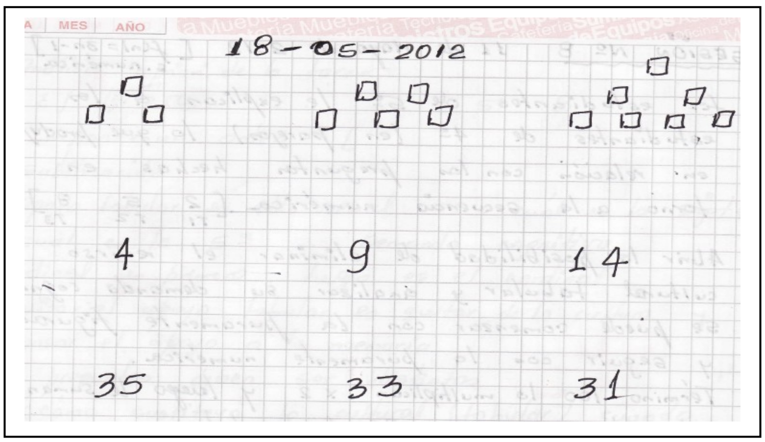


Figura 66. Secuencias propuestas por el investigador en una entrevista focalizada para indagar por el significado del primer término

En relación con la primera secuencia que se muestra, los estudiantes al unísono afirmaron que el primer término era el que se encuentra a la izquierda. En el caso de la secuencia puramente numérica ***4 9 14***, todos los estudiantes afirmaron que el primer término era el ***4***, mientras que para el caso de la secuencia puramente numérica ***35 33 31***, los estudiantes afirmaron que el primer término era el ***31***. Los estudiantes están considerando secuencias crecientes y tal vez ello sucede puesto que las tareas propuestas consideraron, todas, este tipo de secuencias.

4.3.7 Tarea 7: Problema del Mensaje al revés. Esta tarea pretendía explorar las formas como los estudiantes usaban la indeterminancia analítica o algebraica para producir los primeros cinco términos de una secuencia. La relación con la Tarea 4, el Problema del Mensaje, es dialéctica, en tanto en ésta los estudiantes tenían que nombrar la indeterminancia de manera analítica a partir del contenido del mensaje y en especial de la exigencia de comunicar a la profesora Estella la manera de calcular rápidamente el número de círculos de cualquier figura, y en la Tarea 7, dado un mensaje en el cual la indeterminancia algebraica estaba explícitamente dada, los estudiantes debían identificarla y usarla. Presentamos de nuevo la tarea:

En una sesión anterior, habíamos visto a la profesora Johanna que tenía una bolsa y dentro de ella introducía varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números correspondía a una de las figuras de una secuencia dada. Ella sacaba al azar una tarjeta y la introducía en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante hubiera visto el número de la tarjeta. La solicitud de Johanna era que el sobre fuera enviado a la profesora Estella con un mensaje que era introducido en el sobre junto con la tarjeta que contenía el número. Recuerda que este mensaje debía explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que correspondía al número de la tarjeta.

Un alumno escribió el siguiente mensaje:

"Profe Estella, para saber el número de círculos tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado que te dio le sumas 1, y el resultado que te dio corresponde al número de círculos de esa figura".

A partir del mensaje anterior, construye los cinco primeros términos de la secuencia.

Yaneth ha construido su secuencia, pero no coincide con el mensaje que se plantea, pues el primer término de la secuencia elaborada por ella es un círculo. La profesora Johanna dialoga con Yaneth en aras de revisar la manera cómo ha construido su propuesta.

L1. Profesora Johanna**:** Entonces por eso es la relación, ah bueno, pero entonces vamos a mirar [*Señala la hoja*] entonces mira, tú dices listo, figura 1, ¡figura 2! ¿Por qué hay 3?

L2. Yaneth: Porque acá se hacen ehmm dos figuras, dos círculos y este número se pasa, este círculo se pasa pa' acá [*señala la hoja*] y se ponen en 3 [*explica con las manos*].

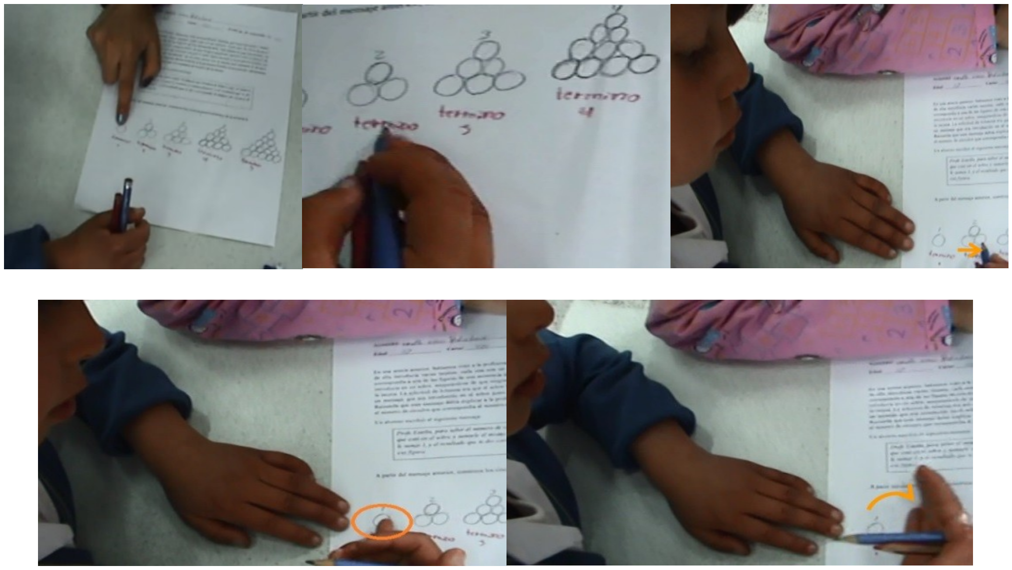


Figura 67. Secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L3. Profesora Johanna: Ok y acá, figura 3[*Señala la hoja*].

L4. Yaneth: Ehmm acá se ponen tres círculos y estos tres que están acá [*Señala los círculos que conforman el segundo término*] se ponen encima.

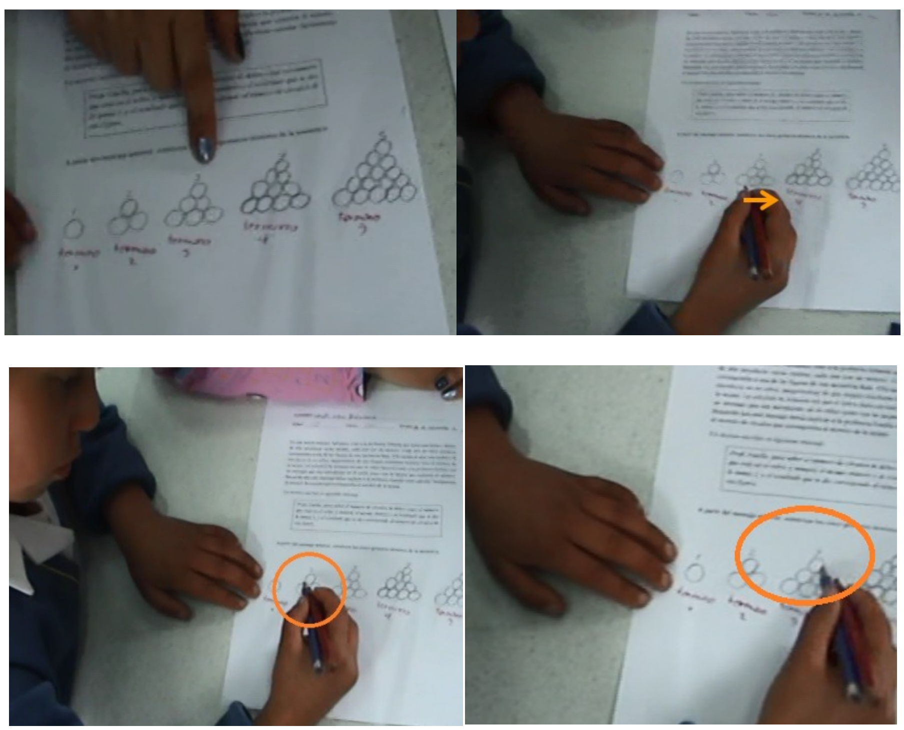


Figura 68. Una segunda secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L5. Profesora Johanna: Figura 4.

L6. Yaneth: Ehh acá se ponen 4 círculos y estos 6 se ponen acá encima [*Señala la hoja*].

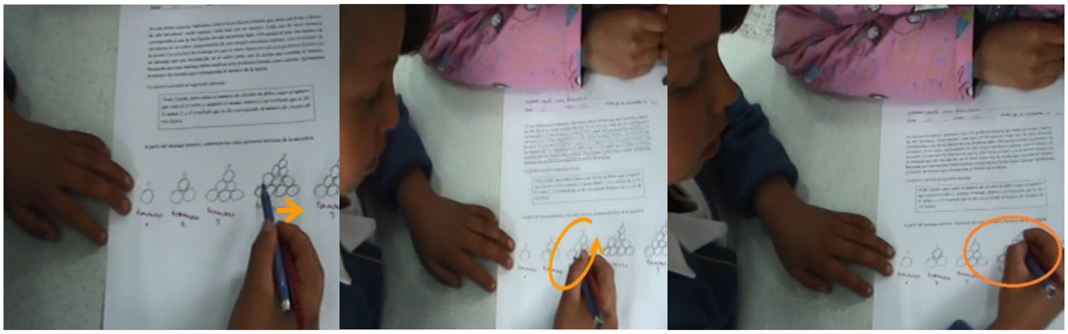


Figura 69. Una tercera secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L7. Profesora Johanna: Figura 5.

L8. Yaneth: Eh acá se ponen 5, 5 círculos y acá se ponen ehm ehm [s*e ríe*].

L9. Profesora: ¿Cuántos?, pues contémoslos ¿cuántos allí? [s*eñala la hoja*].

L10. Yaneth: [*Cuenta con el lápiz*].

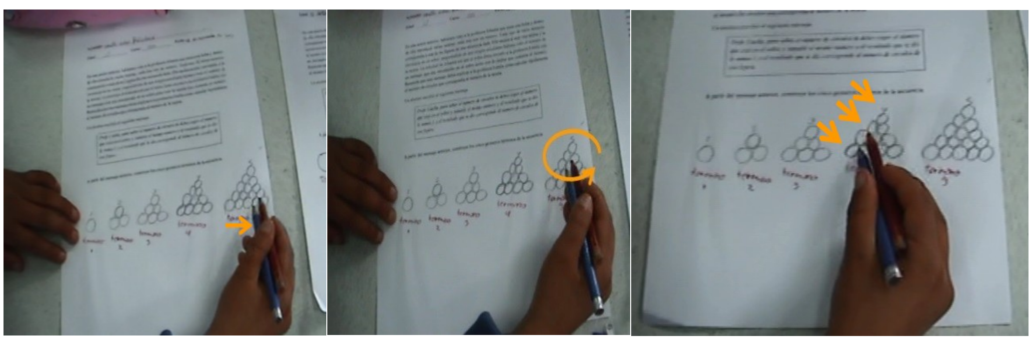


Figura 70. Una cuarta secuencia de señalamientos y deícticos espaciales acompañada de palabras de Yaneth en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L11. Profesora Johanna: Ah bien, entonces, por ejemplo, digamos que a la profe Estelita le salió el uno, entonces ¿ella qué tenía que hacer? ¿Sumarle cuánto? (…) [*interviene Luis Felipe*].

L12. Luis Felipe: Sumarle 1 más 1, más 1.

L13. Profesora Johanna: Entonces, 1más 1, o sea 1más 1, 2, más 1de acá, 3. Listo, ¿cómo construir la 2? [*señala la hoja*].

L14. Luis Felipe: Es 2 más 2, más 1, entonces ahí dan 5.

L15. Profesora Johanna: 3 [*señala la hoja*].

L16. Luis Felipe: 3.

L17. Profesora Johanna: ¿Cuáles 3?, ¿cuáles 3?

L18. Luis Felipe: 3 [*Señala tres círculos en la hoja*].

L19. Profesora Johanna: 3, y ¿cuáles otros 3?

L20. Luis Felipe: Más 3 [*Señala 3 círculos en la hoja*], más 1[*señala el círculo restante de la figura*].

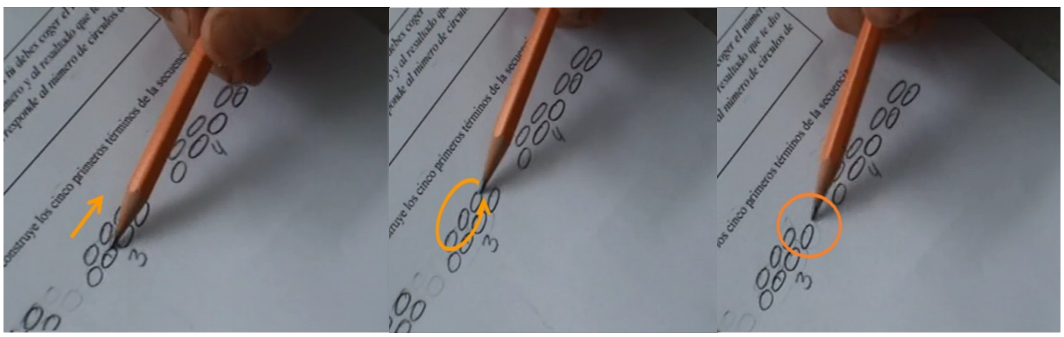


Figura 71. Secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L21. Profesora: Acá, 4.

L22. Luis Felipe: El de 4 igual, 4.

L23. Profesora: ¿Cuáles 4?

L24. Luis Felipe: Estos 4[*señala 4 círculos en la hoja*].

L25. Profesora Johanna: Esos 4.

L26. Luis Felipe: Más 4[*señala otros 4 círculos en la hoja*].

L27. Profesora Johanna: Más otros 4.

L28. Luis Felipe: Más 1[*Señala el círculo restante en la hoja*].

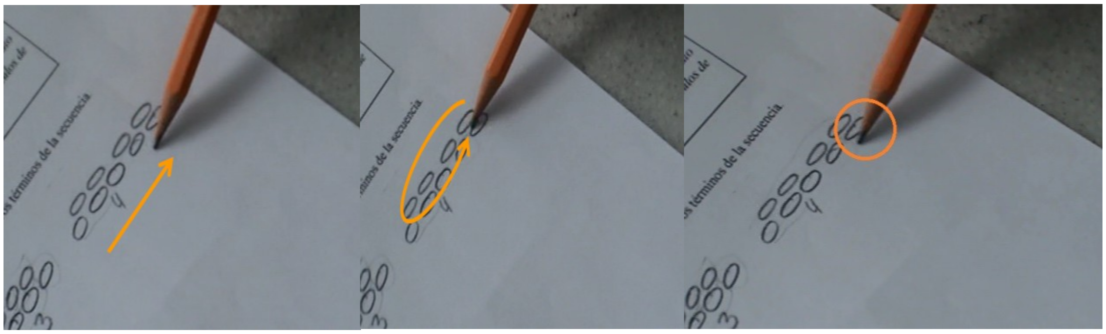


Figura 72. Una segunda secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

L29. Profesora: Más 1, ¿y la 5?

L30. Luis Felipe: 5 [*Señala 5 círculos en la hoja*], más otros 5 [*señala otros 5 círculos en la hoja*] más 1[*señala el círculo restante de la figura*].

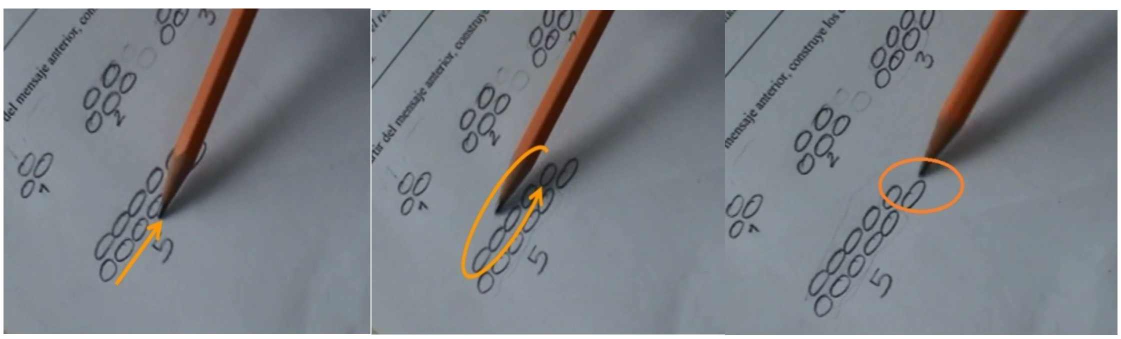


Figura 73. Una tercera secuencia de señalamientos acompañada de palabras de Luis Felipe en interacción con la profesora Johanna. Reconstrucción del video

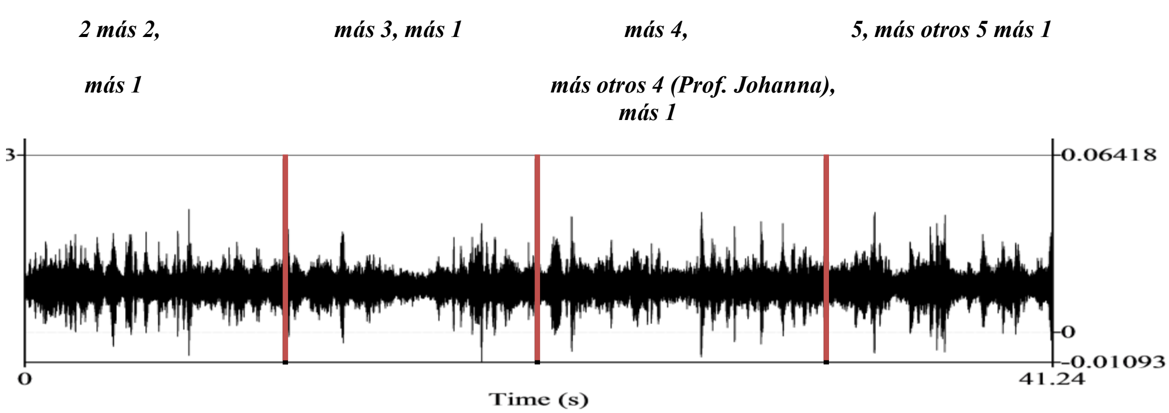


Figura 74. Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Luis Felipe y de la profesora Johanna

En la Figura 74 mostramos un fragmento de 41.24 segundos a través del programa Praat, en donde representamos las elocuciones sucesivas de Luis Felipe, con intervenciones alternadas de la profesora Johanna. Como lo muestra la forma de onda, Luis Felipe hace sus elocuciones *“2 más 2, más 1”, “más 3, más 1”, más 4, más otros 4* (esta última elocución es de la profesora Johanna quien interviene casi rítmicamente)*, “5, más otros 5 más 1”,* las cuales le permiten al estudiante resaltar la monotonía de sus acciones de contar, pausar y adicionar. Es importante aquí resaltar el papel del ritmo como un medio semiótico de objetivación. Aclaramos que la profesora Johanna también interviene repetidamente afirmando y preguntando, y Luis Felipe interviene respondiendo en una especie de vaivén. Lo que queremos resaltar en la Figura 74 es la dinámica casi rítmica de los dos tipos de elocuciones en la interacción de 41.24 segundos que viven los dos, aunque hemos escrito arriba de la figura las elocuciones de Luis Felipe con una intervención de la profesora Johanna en relación con la figura 4 de la secuencia que produjo el estudiante.

Yaneth y Luis Felipe produjeron secuencias diferentes usando la misma indeterminancia algebraica contenida en el mensaje. Observemos que las configuraciones de las dos secuencias pagan tributo, por un lado a la historia cultural de las sesiones anteriores de trabajo y, de otra parte, a la misma estructura lingüística del mensaje, particularmente cuando se dice que *“tú debes coger el número que está en el sobre y sumarle el mismo número y al resultado le sumas 1”*, lo cual podría hacer pensar en los estudiantes que la secuencia que deben construir tiene dos filas, una superior y otra inferior (el caso de Luis Felipe), o construir una secuencia como la de la Tarea 1 (el caso de Yaneth).

Capítulo 5
Resultados de la Investigación

5.1 Introducción

La empresa llevada a cabo en esta investigación nos planteó retos importantes no sólo en la dimensión teórica, sino también en sus aspectos metodológicos. Consideramos una fortaleza de este trabajo la articulación entre estas dos dimensiones. No podría ser de otra manera. La teoría de la objetivación y los elementos asociados con la concepción multimodal del pensamiento humano posibilitaron una mirada muy cercana de la actividad matemática de nuestros estudiantes cuando enfrentaron las tareas sobre secuencias de generalización de patrones.

Estructuramos este capítulo abordando, en primer lugar, la respuesta a nuestra pregunta de investigación. Dicha respuesta se afinca en los planteamientos filosóficos de Hegel y en la toma de conciencia de la importancia del pensamiento multimodal de nuestros estudiantes. Seguidamente, en el apartado de Síntesis y observaciones finales, exponemos algunos elementos que nos parecen importantes subrayar en tanto generan reflexiones didácticas en torno a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar a la vez que sugerimos algunas posibilidades de investigación que se pueden suscitar con este trabajo.

5.2 Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que nos planteamos fue la siguiente:
¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?

De los análisis realizados sobre las producciones de los estudiantes a lo largo de las tareas propuestas sobre generalización de patrones, podemos afirmar que las formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian en la actividad. Ésta la entendemos, en su estructura, como el diseño didáctico de las tareas y el evento o actividad tal y como ocurrió en cada caso, es decir durante cada sesión y más específicamente como se desplegó a partir de los diálogos que sostuvieron los estudiantes entre sí, con la profesora Johanna y con el investigador. Las evidencias analizadas nos permiten constatar que es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico.

En el capítulo anterior mostramos que los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) cambian según lo hace el Particular hegeliano. Los análisis realizados sugieren que la actividad, en general, desarrollada antes del Problema del Mensaje, no invita a pensar la indeterminancia en forma analítica. Este resultado se debió a que las exigencias establecidas en las tareas antes de este Problema propiciaron posibilidades de expresión semiótica en los estudiantes pero al mismo tiempo impusieron ciertos límites. Puede apreciarse cómo en las tareas inquiríamos por el número de círculos (cuadrados, por ejemplo) de figuras remotas, además los mensajes elaborados por los estudiantes se supeditaron al trabajo sobre figuras lejanas pero particulares. Antes de este Problema, la indeterminancia y la analiticidad aparecieron en una forma intuida y la primera (indeterminancia) quedó sin nombrar.

El Problema del Mensaje funcionó como elemento clave de la actividad en la aparición de formas más complejas de pensamiento algebraico. En su abordaje los alumnos tuvieron que movilizar otros medios semióticos de objetivación, en este caso recursos lingüísticos ("*a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé le sumo 3*", "*el numero que te entregaron tienes que multiplicarlo por 2 y el numero que te dio le sumas 3", "sumar el número que le salga en la tarjeta dos beses y le suma mas tres"),* que permitieron instanciar otra forma o estrato de pensamiento algebraico como lo es el Contextual, es decir, una forma de pensamiento algebraico que está en continuidad con el

Factual pero que va más allá, va más lejos. En este sentido, podemos afirmar que hay una *evolución del pensamiento algebraico Factual hacia el Contextual*. Por ejemplo, las expresiones semióticas antes y durante el Problema del Mensaje son distintas, pues en el primer caso se instanciaron expresiones como, por ejemplo, *1000x2 + 3,* mientras que en el segundo caso se produjeron expresiones como *#figura x2 + 3.* En este estrato de pensamiento algebraico Contextual la indeterminancia se tradujo en un objeto del discurso por parte de los estudiantes.

La idea que mantuvimos de *saber* como *movimiento* la evidenciamos a través de testimonios de cambio o como lo plantea Aristóteles, como un antes y un después. Dicha transformación se testimonió a partir del hecho de que el saber cultural (saber "en sí mismo") se transformó en un saber "para sí mismo", esto es, se transformó en saber para los estudiantes. Esta transformación resultó en una nueva forma de percibir, hablar y manipular conceptualmente las secuencias, lo cual sugiere un desarrollo de procesos inacabados o perpetuos, esto es, procesos de subjetivación. A lo largo de las sesiones de trabajo y del desarrollo de la actividad, logramos identificar cómo los estudiantes fueron instanciando formas culturales de pensamiento, reflexión y acción que han quedado codificadas en la cultura.

En el movimiento con el que es propulsado el saber por la actividad, o labor conjunta, ocurrieron las instanciaciones (producciones de los estudiantes) que son singulares en movimiento ellos mismos. Para ser reconocidos, debe haber una codificación cultural que los objetiva y los reconoce. Su codificación los convierte en potencialidad que puede ser enactivada, en el sentido de Radford, a través de una actividad o labor. La objetivación, o la transformación del saber "en sí mismo" en un objeto de conciencia, no fue el resultado de actos solitarios de los estudiantes, no fue el resultado de la contemplación, por el contrario, tal y como se observaron en los diversos diálogos mantenidos entre los estudiantes y la profesora Johanna y los estudiantes y el investigador, la objetivación es la transformación, es el resultado de una actividad material sensorial conjunta -una actividad en donde los estudiantes y la profesora Johanna "lucharon" por comunicar: sus intenciones, el patrón que generaba las secuencias, la comunalidad que relacionaba los términos de la secuencia, etc.

Los análisis llevados a cabo en este estudio ponen en evidencia que las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas con apoyo tabular. En efecto, las secuencias figurales posibilitan una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual se traduce en un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. Dichas estructuras sirvieron de punto de referencia para efectuar la generalización, la cual se consideró como algebraica Factual en el caso de las tareas 1 y 2 y algebraica contextual en el caso de las Tareas 4 y 6.

El análisis de los procesos de generalización a los que recurren los alumnos en el caso de la secuencia numérica con apoyo tabular (Tarea 3) sugiere que inicialmente se presentan generalizaciones aritméticas y posteriormente se avanza (en términos de evolución hegeliana) para lograr una generalización algebraica Factual. En particular, el proceso de generalización de Yaneth se basa en un trabajo de relaciones entre números (pues no se cuenta con elementos geométrico-espaciales). Si bien identificamos en este caso una generalización aritmética muy sofisticada, no evidenciamos, inicialmente, un tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica). El Particular hegeliano jugó un papel preponderante en la idea de hacer evolucionar la generalización aritmética en una algebraica. En particular, Luis Felipe efectúa (y también Yaneth), de hecho, una generalización algebraica Factual, pues, como lo evidenciamos, él llevó a cabo un proceso de generalización de acciones en la forma de un esquema operacional (que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos y gestos como señalamientos o apuntamientos), lo cual le permitió ir más allá de los tres primeros términos y hacer evidente un patrón para determinar el número de cualquier término específico.

En el caso de la Tarea 5 (Secuencia puramente numérica), observamos que los alumnos regresan de nuevo a producciones que evidencian generalizaciones aritméticas y más aún, emergen estrategias de ensayo-error que terminan en meras adivinanzas o inducciones ingenuas. El abordaje de esta tarea pone en evidencia que para los estudiantes el primer término siempre es el número menor, incluso si la secuencia que enfrentan es una de tipo puramente figural como la Tarea 6. Nuevamente el Particular hegeliano, es decir, su estructura, imprime su huella. Tanto los tipos de secuencia (puramente numérica y puramente figural) como los requerimientos establecidos en cada una de ellas, junto con la actividad desplegada, posibilitan las naturalezas de sus instanciaciones o producciones.

El análisis de la actividad matemática de los estudiantes a través de sus producciones, indica que la objetivación ocurrió cuando los estudiantes y la profesora Johanna (el profesor Rodolfo), a través de la actividad sensorial y práctica conjunta, hicieron emerger en el Singular la conceptualidad de lo General. Corroboramos la idea teórica de Radford (2013a) según la cual la objetivación ocurre cuando el Singular actualiza una forma de mirar las secuencias, una forma de mirar que es de naturaleza algebraica. Como sostiene Radford (2012a), se han domesticado tanto el ojo como la mano. Coincidimos en este punto con los planteamientos de Radford (2013a) cuando señala que la objetivación es el momento de la actividad donde lo General, mediado por el Particular, se nos muestra a través del Singular en la conciencia del estudiante.

El caso representativo que logramos registrar y analizar en esta investigación refiere al medio semiótico *"la torre",* el cual no constituyó un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes, sino que fungió como un recurso semiótico en tanto medió los actos intencionales de ellos. La denominación lingüística *"la torre"* por parte de los estudiantes constituye un hallazgo de esta investigación que no ha sido reportado en otros trabajos en educación matemática. Las evidencias que presentamos y analizamos sugieren que las diversas instanciaciones del saber (por ejemplo, pensamiento algebraico Factual), esto es, el conocimiento, que van logrando los estudiantes, llega a ser *conocimiento-con la torre*, como opuesto a conocer vía la torre. Este recurso semiótico reguló en cierto momento la actividad matemática de estos estudiantes, en tanto condicionó las formas como ellos se apropiaron, construyeron o re-significaron dicha actividad y desde luego las maneras de pensar. Este hallazgo coincide con los planteamientos de Radford (2012b) en el sentido que estos artefactos se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer. Coincide también con lo señalado por Cole & Wertsch (1996), cuando plantean que estos instrumentos recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano.

El trabajo desarrollado por los estudiantes en el Problema del Mensaje evidenció una reducción de recursos semióticos y a la vez una concentración del significado en relación con las secuencias. Logramos establecer que a lo largo de las sesiones una gran mayoría de estudiantes tomó una mayor conciencia sobre las características de las secuencias, sobre las maneras de construirlas, la identificación de la comunalidad, entre otras. En términos de desarrollo conceptual, podemos identificar la evolución de la unidad de componentes materiales e ideacionales del pensamiento algebraico, pues presentamos evidencias de avances importantes, por parte de los estudiantes, en su actividad semiótica, en la cual podemos inferir que hubo una toma de decisiones entre lo que consideraban relevante e irrelevante. Este proceso resulta en una vinculación más refinada de los recursos semióticos y en consecuencia un nivel más profundo de conciencia y de inteligibilidad del problema en cuestión. En síntesis, podemos inferir que algunos estudiantes desarrollaron un proceso de contracción semiótica, esto es, un proceso genético o de desarrollo conceptual.

En este contexto, mostramos que la analiticidad aparece mediada por los medios semióticos de objetivación. La denotación se hace a través de una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos y el lenguaje natural. Los alumnos llegan a constituir fórmulas encarnadas en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término o figura particular. La riqueza y potencia del Problema del Mensaje son evidentes. Los estudiantes lograron hacer una generalización algebraica de patrones (Radford, 2008b), pues a partir de la identificación de una característica común lograron plantear una abducción que se tradujo luego en principio asumido o hipótesis, lo cual les permitió deducir apodícticamente una fórmula o regla que proporcionó el valor de cualquier figura.

En el trabajo desarrollado por los estudiantes con este Problema también evidenciamos que el Particular hegeliano cambia de naturaleza debido al tipo de exigencia que propusimos en la tarea, lo cual propulsa otro tipo de actividad o evento, representado por las producciones de los estudiantes y los diálogos que emergieron entre los estudiantes, entre los estudiantes y la profesora Johanna y entre los estudiantes y el proponente de esta tesis doctoral.

Esta investigación muestra que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Los análisis de los datos sugieren, por ejemplo, el papel importante del ritmo como medio semiótico de objetivación. En el proceso de semiosis perceptiva, presentamos análisis de evidencias que indican que la coordinación de deícticos espaciales, ritmo, palabras y actividad perceptual constituye un nodo semiótico, el cual caracteriza la actividad reflexiva de algunos estudiantes, sobre todo en los procesos progresivos de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización.

El análisis de las diversas producciones o instanciaciones de los estudiantes sugiere que el lenguaje natural les sirve de apoyo para expresar a través de una fórmula corpórea, por ejemplo, cuestiones relacionadas con el tiempo; así, expresiones tales como *"sigue sucesivamente",* sugiere que se ha capturado el patrón y se ha identificado la comunalidad. El estudiante no predica sobre una figura particular sino sobre todas las figuras, trascendiendo el aquí y el ahora. El uso de deícticos espaciales en expresiones, por ejemplo, como: "*tiene que ir abajo 5 círculos", "el que sigue", "aquí arriba", "aquí abajo"*, entre otras, puestos en funcionamiento por parte de los estudiantes en sus instanciaciones, son elementos que nos muestran cómo el lenguaje simbólico incorpora la dimensión lingüística. Este hallazgo es importante, pues por lo general en una fórmula algebraica estas expresiones quedan implícitas en su estructura y ésta no deja ver quizás las maneras como han evolucionado las fórmulas corpóreas que se han expresado a través de acciones (por ejemplo, gestos, ritmos, miradas, palabras) y que se despliegan en el espacio y el tiempo. Este elemento didáctico es un indicador que nos brinda información valiosa sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano.

En consonancia con el pronunciamiento anterior, consideramos que esta investigación pone de manifiesto la relevancia de recursos semióticos como tocar, mover, mirar, importancia que ha sido subrayada por Arzarello (2006), cuando señala que estos recursos semióticos emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento algebraico.

5.3 Síntesis y observaciones finales

Los datos expuestos y analizados en esta investigación indican que la consubstancialidad del conocimiento y la actividad (a través de la cual el saber es instanciado) es puesta de presente en las maneras como los estudiantes conocen. Esta consubstancialidad, que se refleja en la manera en la cual las formas culturales como los estudiantes se interrelacionan entre ellos mismos y ellos con la profesora Johanna (y con el investigador), imprime su huella al contenido conceptual instanciado.

El conocimiento que han logrado nuestros estudiantes sobre el pensamiento algebraico en relación con tareas sobre secuencias, si bien es importante, también es necesario subrayar que no es completo. Coincidimos con Radford (2013a) cuando sostiene que el movimiento actualizado no puede capturar lo General en su totalidad. Y no puede hacerlo porque lo General sólo puede ser objeto de la conciencia a través de Particulares y Singulares. Como resultado, la actualización ostensivamente encarna lo General y al mismo tiempo lo hace desaparecer. Esta es la razón por la que la actualización (como evento) es siempre deficiente. Esta investigación muestra, sin embargo, que su deficiencia es portadora de nuevas posibilidades, ya que sólo a través de la actualización algo nuevo puede surgir.

Destacamos que los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico cambian según lo hace la estructura del Particular hegeliano en sus componentes $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Theta}$. Más específicamente, hemos mostrado que la continuidad entre el pensamiento algebraico Factual y el pensamiento algebraico Contextual está determinada por la naturaleza de la indeterminancia, lo cual podría sugerir también una continuidad entre el pensamiento algebraico Contextual y el Estándar o Simbólico. En este sentido, el Problema del Mensaje funge como parte del Particular hegeliano que provoca tal evolución o continuidad.

Este trabajo evidencia la presencia de dos analiticidades. Una analiticidad (GA) relativa a la generalización algebraica como deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas y otra (PA) asociada al carácter operatorio de la indeterminancia, la cual constituye una de las características del pensamiento algebraico. Postulamos que el pensamiento algebraico, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b) (indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013b). Es más, conjeturamos que, al parecer, la analiticidad GA propulsa la analiticidad PA*,* instanciando una forma de pensamiento algebraico Contextual pues la indeterminancia, en este estrato de pensamiento, es analítica.

Esta investigación aporta conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) ponen en juego cuando abordan problemas de generalización de patrones y con la caracterización del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes. Varias reflexiones se han hecho presentes a lo largo de este trabajo y algunas posibilidades de investigación han emergido. Consideramos pertinente y necesario adelantar indagaciones sistemáticas que nos arrojen luces de respuesta sobre los siguientes temas:

- La relación del Particular hegeliano con la evolución del pensamiento algebraico Contextual hacia el pensamiento algebraico Simbólico o Estándar. Esta exploración debería identificar, en relación con las producciones o instanciaciones de los estudiantes, evidencias sobre la evolución de fórmulas corpóreas hacia "formas más sofisticadas".

- La relación dialéctica entre los procesos de generalización algebraica y las formas de pensamiento algebraico. Nuestra investigación aporta elementos de dicha relación y plantea algunos puntos de reflexión que merecen retomarse en futuras investigaciones. En particular, sería interesante estudiar de manera más sistemática las relaciones entre la analiticidad GA y la analiticidad PA. Nos parece también conveniente profundizar las generalizaciones aritméticas y algebraicas en relación con el Particular hegeliano. Al parecer existen formas sofisticadas de generalización aritmética o tal vez proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad).

- Analizar sistemáticamente la incorporación del lenguaje natural en las formulaciones algebraicas de los estudiantes. Un estudio mucho más profundo debería visibilizar cómo se van orquestando estas formulaciones algebraicas, lo cual podría establecer un papel importante de los deícticos espaciales y temporales así como la coordinación de estos con la percepción y la ritmicidad. Este análisis quizás conduzca a comprender aún más el proceso de contracción semiótica de los estudiantes.

En términos más generales, consideramos que la investigación aporta elementos didácticos y metodológicos que nos permiten repensar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en tanto ponen en el horizonte didáctico formas alternativas de intervención en el aula de matemáticas que necesariamente deberían considerar aspectos corpóreos en el acto de conocer y aprender.

Los resultados de esta investigación arrojan elementos que contribuyen a la construcción de currículos —y materiales curriculares— que consideren la perspectiva de Álgebra Temprana, construcción curricular que debe incidir en una mejora significativa de los aprendizajes de los estudiantes, más específicamente, debe redundar en una educación matemática con sentido y significado para ellos. Finalmente, esperamos que estos resultados puedan alimentar los currículos de los programas de formación inicial de docentes de matemáticas, en tanto aportan elementos que permiten pensar en derrotar el prejuicio o la creencia errada de que los aprendizajes de nuestros estudiantes en matemáticas son memorísticos, mecánicos, descontextualizados e inertes, estáticos y en general, útiles para muy poco.

Referencias Bibliográficas

Agudelo-Valderrama, C. (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. y Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE - *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital.* Informe final del Proyecto PROMICE – Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP: Bogotá.

Alibali, M. W., Kita, S., & Young, A. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and Cognitive Processes, 15*, 593–613. doi:10.1080/016909600750040571.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (*editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299.

Arzarello, F. & Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedeings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-154). Melbourne: PME.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Bajtín, M. (1992). *El marxismo y la filosofía del lenguaje*. Madrid: Alianza Editorial. (Original publicado en 1929).

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Siglo XXI. (Original publicado en 1979).

Baquero, R. (2009). *Vigotsky y el aprendizaje escolar.* Buenos Aires: Aique.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bonilla, S. (1994). *Categorías de la interpretación de las letras en álgebra escolar por los estudiantes de noveno grado*. Unpublished MA, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, Bershire: NFER-Nelson Publishers Company Ltd.

Booth, L. R. (1999). Children's difficulties in beginning algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM.

Bruner, J. (2006). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza editorial.

Bruner, J. (2010). *Realidad mental y mundos posibles. Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia*. Barcelona: Gedisa.

Calderón, D. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cárdenas, J. A. (en prensa). La mediación en Vygotski. *Seminario doctoral "Sujeto y Alteridad en el Discurso Pedagógico"*, *Doctorado Interinstitucional en Educación,* Bogotá, Colombia.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching* *and learning of algebra* (pp.155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Castañares, W. (1985). *El signo: problemas semióticos y filosóficos.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado el 8 de mayo de 2011 de http://www.unav.es/gep/TesisDoctorales.html

Castorina, J. A. & Carretero, M. (Comps.) (2012). *Desarrollo cognitivo y educación. Procesos del conocimiento y contenidos específicos* (Vol. II). Buenos Aires: Paidós.

Cole, M. (1999). *Psicología Cultural*. Madrid: Morata.

Cole, M. & Wertsch, J. (1996). Beyond the Individual-Social Antinomy in Discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development* 39, pp. 250-256.

D´Amore, B. (2001). Cocepttualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matemática e la sua didattica*, *2*, 150-173.

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México), Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). 177-196.

D'Amore, B., Radford, L., Bagni, GT. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D´Amore, B., Fandiño, M. I. & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* (M. Fandiño, Trad.). Bogotá: Magisterio.

Davydov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover. (Original work published 1637).

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics'. En A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.

Duval, R. (2001). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th

PME International Conference, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en 1995).

Eco, U. (1988). *Le signe* [the sign]. Bruxelles: Éditions Labor.

English, L. D. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-171.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Fairclough, N. (1995). *Critical discourse analysis; the critical study of languages*. New York, USA: Longman.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna.

García, J. (2006). Identidad y alteridad en Bajtín. *Acta Poética* 27 (1).

Gehlen, A. (1988). *Man, his nature and place in the world*. New York: Columbia University Press.

Glaser, B. G. (1978). *Theoretical Sensitivity. Advances in the Methodology of Grounded Theory.* Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B. G. (2002). "Constructivist Grounded Theory?". Forum: *Qualitative Sozial forschung*/Forum: Qualitative Research (periódico on line), 3(3). Disponible en: http:/qualitative-research.net/fqs-texte/3-o2/3-02glaser-e.htm.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine.

Gillin, J. (1948). *The ways of men.* New York, EU: Appleton-Century-Crofts.

Godino, J & Font, V. (2000). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada. Recuperado en internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

Goetz, J. & Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (1998). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. In *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 9.* Qualitative Research Methods in Mathematics Education. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. New Jersey London: LEA, publishers.

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original publicado en 1837).

Hegel, G. (2004). *Enciclopedia de las ciencias filosóficas.* México. Porrúa. (Original publicado en 1817).

Hegel, G. (2009). *Logic.* (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original publicado en 1830).

Herrero, C. (1992). "Mijail Bajtín y el principio dialógico en la creación literaria y en el discurso humano". En *Revista Suplementos: Historia de la relación filosofía-literatura.* Barcelona: Anthropos. No. 32, (mayo).

Howe, R. (2005). *Comments on NAEP algebra problems*. Retrieved on 24.03.12 http://www.brookings.edu/~/media/Files/events/2005/0914_algebra/Howe_Presentation.pdf

Husserl, E. (1931). Ideas: General introduction to pure phenomenology (W. R. B. Gibson, Trans. Third Edition, 1958). London: Allen & Unwin.

Ilyenkov, E. (1977). 'The concept of the ideal'. In *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*, Progress Publishers, Moscow.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema,, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kendon, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of the utterance. En M. R. Key, *The relationship of verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). Inglaterra: Mouton.

Kendon, A. (1987). On gesture: Its complementary relationship with speech. En A. W. Siegman & S. Feldstein (Eds.), *Nonverbal behavior and communication* (pp. 65-97). New Jersey, E.U.: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: *Past, present, future*, ed. A. Gutiérrez and P. Boero, 23-49. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI*, Rome, March 2008.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Krutetzki, V.A. (1976). '*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'*. Translated from the Russian by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup. The University of Chicago Press.

Lamiell, J. T. (2003). *Beyond individual and Group Differences*. Thousand Oaks, Ca: Sage

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Maddock, M. N. (1981). Science education: An anthropological viewpoint. *Studies in Science Education*, *8*, 1-26.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Mathematical thinking*. London: Addison-Wesley.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel.* Lanham, MD: Lexington Books.

Marx, K. & Engels, F. (1970). *The German Ideology*, Edited with Introduction by C. J. Arthur, New York: International Publishers.

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception.* Paris: Gallimard.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

McNeill, D. (1985). So you think gestures are nonverbal? *Psychological Review, 92*(3), 350-371.

Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científico-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de Bachillerato.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de

Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, *19*(3), 5-30.

Montagu, A. (Ed.). (1968). *Man's adaptive dimension*. New York, EU: Oxford University Press.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E. & Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 33-46.

Noel, G. (1995). *La lógica de Hegel*. (J. A. Díaz, Trad.). Bogotá: Editorial Universidad Nacional. (Original publicado en 1933).

NCTM 'National Council of Teachers of Mathematics' (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Orton, A. & Orton, J. (1994). 'Students' perception and use of pattern and generalization', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, University of Lisbon, 407-414.

Orton, A. & Orton, J. (1996). 'Making sense of children's patterning' en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, University of Valencia, 83-90.

Perry, P., Gómez, P., Valero, P., Castro, M. & Agudelo-Valderrama. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: "una empresa docente". Universidad de los Andes.

Planas, N. (2002). Nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática: el caso de la competencia comunicativa. *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 175-186). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado en internet el 17 de abril de 2011 en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Nociones%C2%A0sociales%C2%A0recontextualizadas%C2%A0en%C2%A0educaci%C3%B3n%C2%A0matem%C3%A1tica:%C2%A0el%C2%A0caso%C2%A0de%C2%A0la%C2%A0competencia%C2%A0comunicativa*Planas,%20N%C3%BAria*831066%5B1%5D.pdf

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American Educational Research Journal, 41*(1), 3-34.

Pretexto Grupo (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Gaia.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre, Repères (*Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques de France*), juillet, *28*, 81-96.

Radford, L. (2000a). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2000b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica 2004*, Alta Scuola Pedagogica. Locarno: Suisse, pp. 11-27.

Radford, L. (2004a). Syntax and meaning. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad, *Proceedings of the PME-28*, Vol. 1, pp. 161-166. Bergen, Norway.

Radford, L. (2004b). Semiótica cultural y cognición. *Conferencia plenaria Décima octava Reunión latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autónoma de Chiapas.

Radford, L. (2005a). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In Simmt 199 E. and Davis B. (Eds.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, pp. 111-117.

Radford, L. (2005b). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, Vol. 1, pp. 143-145.

Radford, L. (2006a). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 39-65.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L. (2006c). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 - 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008b). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2-7.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.

Radford, L. (2012b). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 238-288). New York: Springer.

Radford, L. (2013a). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2* (1), 7-44. doi: http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91 – 95.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2003). "Calculators, Graphs and the Production of Meaning", en N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pme27 –pmena25), University of Hawaii, vol. 4, pp. 55-62.

Radford, L. & Demers, S. (2004). Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques, 206 p.

Radford, L. & Roth, W. M. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, Online First. Doi 10.1007/s10649- 10010-19282-10641.

Ramos, S. (1936). *El perfil del hombre y la cultura en México*. (15 Ed.). México, D.F.: Espasa-Calpe.

Rancière, J. (1999). *Dis-agreement: Politics and philosophy*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Ratner, C. (2000). Outline of a coherent, comprehensive concept of culture. The problem of fragmentary notions of culture. *Cross-Cultural Psychology Bulletin*, Trinidad, USA.

Rosch, E. (1975). Universals and cultural specifics in human categorization. En *Cross-Cultural perspectives on learning*, Richard W. Brislin, Stephen Bochner y Walter J. Lonner (Eds.), pp. 177-206. New York, EE.UU.: John Wiley & Sons.

Roth, M. & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Ontario: Sense Publishers.

Rubinstein, S.L. (1966). *El proceso del Pensamiento.* La Habana: Editora Nacional de Cuba.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Bologna, Bologna, Italia.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 285–311.

Serfati, M. (1999). La dialectique de l'indéterminé, de viète à frege et russell. In M. Serfati (Ed.), *La recherche de la vérité* (pp. 145- 174). Paris: ACL – Les éditions du kangourou.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Soneira, A. J. (2006). “La Teoría fundamentada en los datos de Glaser y Strauss”. En Vasilachis de Gialdino, I. (Coord.). *Estrategias de investigación cualitativa.* (pp. 153-173). Barcelona: Gedisa.

Talizina, N. (2008). Mecanismos psicológicos de la generalización. *Acta Neurol Colomb, 24*(2), Junio Suplemento, (2:1).

Valsiner, J. (2012). “La dialéctica en el estudio del desarrollo”. En: Castorina, J. & Carretero, M. (Comps.). *Desarrollo cognitivo y educación. Procesos del conocimiento y contenidos específicos* (Vol. II). (pp. 139-162). Buenos Aires: Paidós.

Vasco, C. E. (2002). El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá-Colombia.

Vasco, C. E. (2007). “Análisis semiótico del álgebra elemental”. En: Vasco, C.E. y Gómez A. L. (Eds). *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas.* (pp. 107-136). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital francisco José de Caldas.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover. (Trabajo original publicado en 1591).

Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, *36,* 415-434.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, E.U.: Harvard University Press.

Vygotski, L. (1987). *Historia del desarrollo de las Funciones Psicológicas Superiores*. La Habana: Científico-Técnica.

Vygotski, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo. Trad. de la versión inglesa, *Mind in Society: The development of higher psycholgical processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press. La Habana: Ed. Científico-Técnica.

Vygotsky, L. (1989). *El proceso de formación de la psicología marxista: L. Vygotsky, A. Leontiev, A. Luria.* URSS: Progreso.

Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).

Vygotski, L. (2007). *Pensamiento y habla* (A. Ariel González, Trad.). Buenos Aires: Ediciones Colihue. (Original publicado en 1934).

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Versión original: *Vygotsky and the social formation of mind*, Cambridge: Harvard University Press, 1985.

Wertsch, J. (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada.* Madrid: Visor.

Wertsch, J. (1998). *La mente en acción.* Madrid: Aique.

White, L. A. (1959). The concept of culture. *American Anthropologist, 61*(2), 227-251.

You, H. (1994). Defining rhythm: aspects of an anthropology of rhythm. *Culture, Medicine and Psychiatry, 18*, 361-384.